

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

CAIET DE SEMINAR

UNIVERSITATEA CREȘTINĂ „DIMITRIE CANTEMIR”
FACULTATEA DE RELAȚII ECONOMICE INTERNAȚIONALE

Conf. univ. dr. GRAȚIELA GHIC

MATEMATICĂ APLICATĂ ÎN ECONOMIE
CAIET DE SEMINAR



EDITURA UNIVERSITARĂ
București, 2015

Colecția ȘTIINȚE ECONOMICE

Redactor: Gheorghe Iovan

Tehnoredactor: Ameluța Vișan

Coperta: Monica Balaban

Editură recunoscută de Consiliul Național al Cercetării Științifice (C.N.C.S.) și inclusă de Consiliul Național de Atestare a Titlurilor, Diplomelor și Certificatelor Universitare (C.N.A.T.D.C.U.) în categoria editurilor de prestigiu recunoscut.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

GHIC, GRAȚIELA

Matematici aplicate în economie : caiet de seminar /

GrațIELA Ghic. - București : Editura Universitară, 2015

Bibliogr.

ISBN 978-606-28-0224-0

51:338(075.8)

DOI: (Digital Object Identifier): 10.5682/9786062802240

© Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate, nicio parte din această lucrare nu poate fi copiată fără acordul Editurii Universitare

Copyright © 2015

Editura Universitară

Editor: Vasile Muscalu

B-dul. N. Bălcescu nr. 27-33, Sector 1, București

Tel.: 021 – 315.32.47 / 319.67.27

www.editurauniversitara.ro

e-mail: redactia@editurauniversitara.ro

Distribuție: tel.: 021-315.32.47 / 319.67.27 / 0744 EDITOR / 07217 CARTE

comenzi@editurauniversitara.ro

O.P. 15, C.P. 35, București

www.editurauniversitara.ro

CUPRINS

RECAPITULAREA NOȚIUNILOR FUNDAMENTALE	7
I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ	11
1. SPAȚII VECTORIALE	11
Întrebări de control și teme de dezbatere	13
I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ	18
2. SUBSPAȚII VECTORIALE	18
Întrebări de control și teme de dezbatere	18
I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ	21
3. LINIARITATE. GENERATORI. BAZE. COORDONATE	21
Întrebări de control și teme de dezbatere	23
I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ	27
4. SCHIMBAREA BAZEI. LEMA SUBSTITUȚIEI METODA PIVOTULUI	27
Întrebări de control și teme de dezbatere	28
I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ	32
5. FUNCȚIONALE PE SPAȚII VECTORIALE	32
Întrebări de control și teme de dezbatere	33
I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ	36
6. REDUCEREA FUNCȚIONALELOR PĂTRATICE LA FORMA CANONICĂ	36
Întrebări de control și teme de dezbatere	37
II. ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ	41
1. ALGORITMUL SIMPLEX PRIMAL	41
Întrebări și teme de dezbatere	43
II. ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ	49
2. PROBLEMA DE TRANSPORT	49
Întrebări și teme de dezbatere	51
III. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ	57
1. TEORIA DIFERENȚIALĂ A FUNCȚIILOR VECTORIALE REALE	57
Întrebări de control și teme de dezbatere	60
III. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ	64
2. OPTIMIZAREA FUNCȚIILOR VECTORIALE REALE	64
Întrebări de control și teme de dezbatere	65

III. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ	68
3. OPTIMIZAREA FUNCȚIILOR VECTORIALE CONDIȚIONATE.....	68
Întrebări și teme de dezbatere	69
III. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ	74
4. COMPLEMENTE DE CALCUL INTEGRAL. INTEGRALE IMPROPRII.....	74
Întrebări și teme de dezbatere	76
IV. ELEMENTE DE BAZĂ ALE TEORIEI PROBABILITĂȚILOR	78
1. PROBABILITATE. FORMULE FUNDAMENTALE	78
Întrebări de control și teme de dezbatere	80
IV. ELEMENTE DE BAZĂ ALE TEORIEI PROBABILITĂȚILOR	83
2. VARIABLE ALEATOARE	83
Întrebări de control și teme de dezbatere	90
V. ELEMENTE DE MATEMATICI FINANCIARE	93
DOBÂANDA SIMPLĂ ȘI COMPUSĂ	93
Întrebări de control și teme de dezbatere	95
BIBLIOGRAFIE	102

RECAPITULAREA NOȚIUNILOR FUNDAMENTALE

Anexa 1 Alfabetul grec

Alfabetul grec este o culegere a celor 24 de litere, care este folosit pentru a scrie în limba greacă de la secolul VIII î.Hr. până astăzi.

Alfabetul grec

Literă mare	Literă mică	Transcriere clasică	Denumire
A	α	A	Alpha
B	β	B	Bêta
Γ	γ	g	Gamma
Δ	δ	d	Delta
E	ε	e	Epsilon
Z	ζ	z	Dzêta
H	η	ê	Êta
Θ	θ	th	Thêta
I	ι	i	Iota
K	κ	k	Kappa
Λ	λ	l	Lambda
M	μ	m	Mi
N	ν	n	Ni
Ξ	ξ	x/ks	Xi
O	ο	o	Omicron
Π	π	p	Pi
P	ρ	r	Rhô
Σ	σ, ς	s	Sigma
T	τ	t	Tau
Υ	υ	y	Ypsilon
Φ	φ	ph	Phi
X	χ	kh	Khi
Ψ	ψ	ps	Psi
Ω	ω	ô	Oméga

Este și primul și cel mai vechi alfabet în sensul că denotă fiecare vocală și fiecare consoană cu semnul separat.

De la secolul II î.Hr. literele grecești se folosesc și pentru a marca numeralele.

Alfabetul grec își are originile în alfabetul fenician și la baza formării mai multor alfabete folosite în Europa și Orientul Mijlociu, inclusiv latin și chirilic. În afară de funcția sa de reprezentare scrisă a limbii grecești, literele alfabetului grec sunt folosite azi ca simboluri în matematică și alte științe exacte.

Literele grecești sunt folosite deseori în notația științifică, mai ales în algebra și fizică:

- Unghiurile sunt notate cu θ (*theta mic*) sau α (*alpha mic*).
- Litera Δ (*delta mare*) este folosit pentru a desemna un interval, dar și pentru a calcula o ecuație de gradul al II-lea
- Litera ε (*epsilon mic*) este folosită pentru a desemna valorile neglijabile (cantități mici).
- Litera π (*pi mic*) este utilizată în matematică pentru a desemna circumferința unui cerc cu raza egală cu o unitate (aproximativ 3,1415926536).
- Litera Π (*pi mare*) este utilizată în matematică pentru a desemna un produs de elemente.
- Litera ω (*omega mic*) desemnează în fizică viteza unghiulară.
- Litera Ω (*omega mare*) este simbolul pentru o unitate în SI a rezistenței electrice, ohmul.
- Litera μ (*mu mic*) este simbolul pentru prefixul SI *micro* care reprezintă o milionime dintr-o unitate.
- Litera ρ (*rho mic*) este folosită în matematică pentru a indica curbele polare, și în fizică pentru densitate.
- Litera χ (*chi mic*) este utilizată în fizică pentru a desemna un coeficient de compresibilitate (termodinamică și unde)
- Litera Σ (*sigma mare*) este utilizată în matematică pentru a desemna o sumă de elemente.
- Literele grecești sunt folosite pentru a desemna stelele.
- Diferitele tipuri de radiație emisă de materialele radioactive sunt notate respectiv α , β și γ .

Anexa 2 Abrevieri și termeni

Lema - gr. lemma "propoziție luată ca argument", propoziție ajutătoare folosită la demonstrarea unei teoreme; lemele au fost folosite inițial de Euclid (sec.3 î.e.n.).

Teorema - gr. theorema "examinare, cercetare", denumirea a fost folosită inițial de Aristotel.

În calculul vectorial, nabla este un operator diferențial ce operează asupra funcțiilor, reprezentat prin simbolul ∇ ¹.

În funcție de cum este aplicat operatorul, el poate descrie gradientul (panta), divergența sau rotorul.

Matematic, nabla poate fi privit ca o derivată în spațiul multidimensional.

Când este folosit într-o singură dimensiune, el ia forma derivatei din analiza matematică.

Ca operator, el operează pe câmpuri vectoriale și câmpuri scalare care suportă operații similare înmulțirii. Ca toți operatorii, acești operatori similari înmulțirii nu trebuie să fie confundați cu înmulțirea; în particular, nabla nu comută.

¹ Nabla este un simbol matematic folosit în primul rând ca o convenție de notație.

În coordonate carteziene tridimensionale, R^3 cu coordonatele (x, y, z) , nabla se definește ca

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

unde $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ este baza standard în R^3 .

Această definiție poate fi generalizată într-un spațiu euclidian, de dimensiune n R^n .

În sistemul de coordonate carteziene cu coordonatele (x_1, x_2, \dots, x_n) , nabla este:

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{unde } \{\vec{e}_i : 1 \leq i \leq n\} \quad \text{este baza standard în acest spațiu.}$$

Mai pe scurt, folosind notația Einstein, nabla se scrie ca $\nabla = \vec{e}_i \partial_i$

Nabla poate fi exprimat și în alte sisteme de coordonate, de exemplu în coordonate cilindrice sau sferice.

Nabla este folosit drept formă prescurtată de scriere pentru simplificarea multor expresii matematice lungi.

Cel mai adesea, este folosit pentru a simplifica expresiile pentru gradient, divergență, rotor, derivată direcțională și Laplacian.

Atât regula lui Sarrus cât și regula triunghiului se aplică numai determinanților de ordin 3.

Tabel de derivate

Determinarea derivatei este operația primară în calculul diferențial.

Acest tabel conține derivatele celor mai importante funcții, precum și reguli de derivare pentru funcții compuse.

În cele ce urmează, f și g sunt funcții de x , iar c este o constantă.

Funcțiile sunt presupuse reale de variabilă reală.

Aceste formule sunt suficiente pentru a deriva orice funcție elementară.

Reguli generale de derivare

$$\begin{aligned} (cf)' &= cf' & (f+g)' &= f' + g' & (f-g)' &= f' - g' \\ (fg)' &= f'g + fg' & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} & (f \circ g)' &= (f' \circ g)g' \\ (f^g)' &= (gf^{g-1})f' + (f^g \ln f)g' = f^g \left(f' \frac{g}{f} + g' \ln f \right), & f > 0 \end{aligned}$$

Derivatele funcțiilor simple

$$\begin{aligned} c' &= 0 & x' &= 1 & (x^c)' &= cx^{c-1}, & x > 0 \\ (|x|)' &= \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x, & x \neq 0 & & (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} & \left(\frac{1}{x}\right)' &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Derivatele funcțiilor exponențiale și logaritmice

$$\begin{aligned} (n^x)' &= n^x \ln n, & n > 0 & & (e^x)' &= e^x \\ (\log_n x)' &= \frac{1}{x \ln n}, & n > 0, n \neq 1 & & (\ln x)' &= \frac{1}{x}, & x > 0 \end{aligned}$$

Derivatele funcțiilor trigonometrice

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad (\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x = -1 - \operatorname{ctg}^2 x \quad (\operatorname{csc} x)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{csc} x$$

Derivatele funcțiilor trigonometrice inverse

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccsc} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Derivatele funcțiilor hiperbolice

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ctgh} x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{ctgh} x \operatorname{csch} x$$

Derivatele funcțiilor hiperbolice inverse

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcosh} x = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artgh} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsech} x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcctgh} x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsch} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

1. SPAȚII VECTORIALE

Definiție și terminologie	Observații
<p>Definiția 1 Fie $(K, +, \cdot)$ un corp nevid (de exemplu, corpul numerelor reale sau complexe, cu 0_K și 1_K elementul zero și respectiv elementul unitate) și V o mulțime nevidă, înzestrată cu o lege de compoziție internă $\oplus: V \times V \rightarrow V$ și o lege de compoziție externă $\otimes: K \times V \rightarrow V$ astfel încât: Tripletul (V, \oplus, \otimes) se numește spațiu vectorial peste corpul K dacă: - V este grup abelian în raport cu legea de compoziție internă \oplus (cu elementul neutru 0 și $-x$ elementul opus lui $x \in V$); - legea de compoziție externă satisface cerințele: 1. $(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$; 2. $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y), \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$; 3. $(\alpha \cdot \beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$; 4. $1 \otimes x = x, \forall x \in V, x \neq 0$.</p> <p>Notăm V/K, adică V este spațiu vectorial peste corpul K.</p> <p>Terminologie și notații</p> <ol style="list-style-type: none">1. Elementele spațiului vectorial V se numesc vectori și se notează cu litere latine mici.2. Elementele lui K se numesc scalari și se notează cu litere grecești mici.3. Un spațiu vectorial peste \mathfrak{R} se numește spațiu vectorial real.4. Un spațiu vectorial peste \mathbf{C} se numește spațiu vectorial complex. <p>Propoziție Într-un spațiu vectorial, au loc următoarele reguli de calcul:</p> <ol style="list-style-type: none">a) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y, \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V$;b) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V$;c) $0x = 0, \forall x \in V$;d) $\alpha 0 = 0, \forall \alpha \in K$;e) $1x = x, \forall x \in V$;f) $(-1)x = -x, \forall x \in V$;g) $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0, \forall \alpha \in K, \forall x \in V$.	

Exemple.

1. Spațiul vectorial numeric real $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}$ definit prin

$$\mathfrak{R}^n = \underbrace{\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \dots \times \mathfrak{R}}_{n \text{ ori}} = \left\{ (x_1, \dots, x_n)^t / x_i \in \mathfrak{R}, i = \overline{1, n} \right\},$$

și înzestrat cu operațiile canonice:

- legea de compoziție internă este adunarea vectorilor
- legea de compoziție externă este înmulțirea vectorilor cu scalar real.

Explicit, definim cele două operații:

a) dacă $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ atunci

adunarea vectorilor $x + y$ se definește pe componente:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$$

b) înmulțirea vectorului cu un scalar se definește prin multiplicarea tuturor componentelor vectorului cu respectivul scalar:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathbf{R}^n$$

Observație

1. Egalitatea a doi vectori este definită astfel:

2.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sunt egali dacă și numai dacă $x_i = y_i, \forall i = \overline{1, n}$.

2. Mai general, K^n/K înzestrat cu operațiile canonice este spațiu vectorial

$$K^n = \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_{n \text{ ori}} = \left\{ (x_1, \dots, x_n)^t / x_i \in K, i = \overline{1, n} \right\}$$

unde K este corpul numerelor reale sau complexe.

3. Spațiul vectorial al matricelor $M_{m,n}(K)/K$ cu m linii și n coloane cu elemente din corpul K , unde $K = \mathfrak{R}$ sau $K = \mathbf{C}$, înzestrat cu operațiile canonice:

- legea de compoziție internă este adunarea matricelor,
- legea de compoziție externă este înmulțirea matricelor cu scalar.

4. Spațiul polinoamelor într-o nedeterminată, cu coeficienți reali de grad cel mult n .

Întrebări de control și teme de dezbatere

Exerciții rezolvate

1. Spațiul $\mathfrak{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t, x_i \in \mathfrak{R}, i = \overline{1, n}\}$ este spațiu vectorial real față de adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalari.

Soluție: $V = \mathfrak{R}^n, K = \mathfrak{R}$

$$\oplus: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n \\ (x, y) \rightarrow x \oplus y$$

$$\text{Fie } x \in \mathfrak{R}^n, y \in \mathfrak{R}^n \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ cu } x_i, y_i \in \mathfrak{R}, \forall i = \overline{1, n}$$

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

$$\otimes: \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n \\ (\alpha, x) \rightarrow \alpha \otimes x$$

$$\text{Pentru } \alpha \in \mathfrak{R} \text{ și } x \in \mathfrak{R}^n \text{ definim } \alpha \otimes x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

Verificăm axiomele din definiția spațiului vectorial.

i) (\mathfrak{R}^n, \oplus) grup abelian

$$\text{a) } \forall x, y \in \mathfrak{R}^n \Rightarrow x \oplus y \in \mathfrak{R}^n$$

Vectorul $x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$ pentru că are n componente reale (adunând două numere reale obținem un număr real)

$$\text{b) } x \oplus y = y \oplus x, \forall x, y \in \mathfrak{R}^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$x_i + y_i = y_i + x_i, \forall i = \overline{1, n}$ (adunarea numerelor reale este comutativă)

$$\text{c) } (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), \forall x, y, z \in \mathfrak{R}^n$$

$$(x \oplus y) \oplus z = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ \vdots \\ (x_n + y_n) + z_n \end{pmatrix}$$

$$x \oplus (y \oplus z) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ \vdots \\ x_n + (y_n + z_n) \end{pmatrix}$$

Cei doi vectori sunt egali pentru că au componentele respectiv egale (adunarea numerelor reale este asociativă).

$$d) \exists e \in \mathfrak{R}^n \text{ astfel încât } \forall x \in \mathfrak{R}^n \Rightarrow e \oplus x = x \oplus e = x$$

$$\text{Din } e \oplus x = x \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 + x_1 \\ \vdots \\ e_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow e_i + x_i = x_i, \forall i = \overline{1, n} \Leftrightarrow e_i = 0, \forall i = \overline{1, n}.$$

$$\text{Deci } e = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

$$e) \forall x \in \mathfrak{R}^n \exists x' \in \mathfrak{R}^n \text{ astfel încât } x \oplus x' = x' \oplus x = e$$

$$\text{Din } x \oplus x' = e \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_i + x'_i = 0 \forall i = \overline{1, n} \Leftrightarrow x_i = -x'_i, \forall i = \overline{1, n}.$$

$$\text{Deci } x' = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

ii) \otimes satisface următoarele cerințe:

$$a) (\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x), \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \text{ și } \forall x \in \mathfrak{R}^n$$

$$\text{Vectorul } (\alpha + \beta) \otimes x = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)x_1 \\ \vdots \\ (\alpha + \beta)x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Vectorul } (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta x_n \end{pmatrix}$$

Cei doi vectori sunt egali deoarece $(\alpha+\beta)x_i = \alpha x_i + \beta x_i, \forall i = \overline{1, n}$ (înmulțirea numerelor reale este distributivă față de adunare la stânga și la dreapta).

$$b) \alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R} \text{ și } \forall x, y \in \mathfrak{R}^n$$

$$\alpha \otimes (x \oplus y) = \alpha \otimes \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + y_1) \\ \vdots \\ \alpha(x_n + y_n) \end{pmatrix}$$

$$(\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \vdots \\ \alpha y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \alpha y_n \end{pmatrix}$$

Dar $\alpha(x_i + y_i) = \alpha x_i + \alpha y_i, \forall i = \overline{1, n}$

$$c) (\alpha\beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \text{ și } \forall x \in \mathfrak{R}^n$$

$$(\alpha\beta) \otimes x = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ \vdots \\ (\alpha\beta)x_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \otimes (\beta \otimes x) = \alpha \otimes \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \vdots \\ \alpha(\beta x_n) \end{pmatrix}$$

Dar $(\alpha\beta)x_i = \alpha(\beta x_i), \forall i = \overline{1, n}$ (înmulțirea numerelor reale este asociativă)

$$d) 1 \otimes x = x, \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n;$$

$$1 \otimes x = \begin{pmatrix} 1x_1 \\ \vdots \\ 1x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$$

Cum $1x_i = x_i, \forall i = \overline{1, n}$ (elementul neutru la înmulțirea numerelor reale este 1).

2. Să se arate că \mathfrak{R} este un spațiu vectorial peste \mathfrak{Q} , dar \mathfrak{Q} nu este un spațiu vectorial peste \mathfrak{R} , operațiile fiind cele cunoscute.

Soluție: Prima afirmație este evidentă pentru că $(\mathfrak{R}, +)$ este grup abelian; pentru setul (ii): (1) și (2) sunt consecințe ale distributivității înmulțirii față de adunare, (3) este o consecință a

asociativității înmulțirii numerelor reale, iar (4) este echivalentă cu faptul că 1 este elementul neutru pentru înmulțire. \mathbb{Q} nu este spațiu vectorial real întrucât înmulțirea nu este lege externă.

Într-adevăr, trebuie să avem: $(\forall)\alpha \in \mathbb{Q}, (\forall)x \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in \mathbb{Q}$, dar pentru

$$\alpha = 1 \text{ și } x = \sqrt{2}, \alpha x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Exerciții propuse

1. Să se arate că:

a) \mathbb{Q} este \mathbb{Q} -spațiu vectorial;

b) \mathbb{C} este \mathbb{R} – spațiu vectorial.

2. Fie $\mathbb{C}^3 / \mathbb{C}$ și $V \subset \mathbb{C}^3$, unde:

$$\text{a) } V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 \in \mathfrak{R} \right\}$$

$$\text{b) } V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 = 0 \right\}$$

$$\text{c) } V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

În care din aceste cazuri este V un spațiu vectorial?

3. Fie V/K și W/K două spații vectoriale. Arătați că

$$V \times W = \{(x, y) \mid x \in V, y \in W\}$$

este un spațiu vectorial peste K în raport cu operațiile:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

$$\forall x_1, x_2 \in V, y_1, y_2 \in W, \forall \alpha \in K.$$

4. Arătați că mulțimea matricelor de ordin $m \times n$ formează în raport cu adunarea matricelor și înmulțirea lor cu scalar un spațiu vectorial ($K = \mathfrak{R}$).

I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

2. SUBSPAȚII VECTORIALE

Subspații vectoriale

Definiția 2.

O submulțime nevidă a unui spațiu vectorial se numește subspațiu vectorial al său, dacă este chiar spațiu vectorial în raport cu legile de compoziție internă și externă induse de legile corespunzătoare.

Matematic: Fie spațiul vectorial V/K , o submulțime, $W \neq \emptyset$ se numește subspațiu vectorial al spațiului V , dacă W este spațiu vectorial înzestrat cu operațiile induse.

Definiția 3.

O submulțime nevidă W a spațiului vectorial V , se numește subspațiu vectorial al lui V dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. $\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$
2. $\forall x \in W, \forall \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in W$.

Observație

Cele două condiții sunt echivalente cu:

$$\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W.$$

Terminologie și notații

- a) Spațiul vectorial se numește spațiu ambient pentru subspațiul vectorial pe care-l conține.
- b) Legile de compoziție (internă și externă) induse de legile corespunzătoare pe subspațiul vectorial se numesc operații induse.
- c) Corpul scalarilor se subînțelege a fi identic.
- d) W este subspațiu vectorial al spațiului vectorial V se notează $W < V$.

Teorema 1. (Echivalența definițiilor)

Fie V/K , $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. Atunci $W < V \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in K \forall x, y \in W, \alpha x + \beta y \in W$.

Propoziție.

Intersecția de subspații vectoriale este un subspațiu vectorial.

Întrebări de control și teme de dezbateri

Exerciții rezolvate

1. Să se verifice dacă următoarea submulțime

$X = \{x = (x_1, x_2, x_3)' / x_1 = 0\} \subset \mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbf{R}, \forall i = \overline{1, 3}\}$ înzestrată cu operațiile induse are structura de subspațiu vectorial real a spațiului tridimensional real.

Soluție

Verificăm cele două condiții din definiția:

$$i) \quad (0, x_2, x_3)' + (0, x_2, y_3)' = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3)' \in X$$

$$ii) \quad \alpha x = \alpha(0, x_2, x_3) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3)' \in X,$$

ceea ce atestă structura de subspațiu vectorial real a lui X .

2. Să se verifice dacă următoarea submulțime

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3)' / x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbf{R}, \forall i = \overline{1, 3}\}$$

înzestrată cu operațiile induse are structura de subspațiu vectorial real a spațiului tridimensional real.

Soluție

Conform observației, este suficient să verificăm condiția

$$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in X.$$

Pentru

$$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \text{ și } y_1 - y_2 + y_3 = 0$$

și prin calcul direct se obține $\alpha x + \beta y \in X$ ceea ce atestă structura de subspațiu vectorial real a lui X

Exerciții propuse

1. Considerăm următoarele submulțimi ale lui

$$\mathfrak{R}^n :$$

$$X_1 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)' \text{ și } x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

$$X_2 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)' \text{ și } x_1 = 1\}$$

$$X_3 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)^t \text{ și } x_1 x_2 = 1\}$$

$$X_4 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)^t \text{ și } x_1 + x_2 = 1\}$$

$$X_5 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)^t \text{ și } x_1 = x_2 = x_3\}$$

Care dintre acestea sunt subspații vectoriale ale lui \mathfrak{R}^n ?

2. Fie $X = \{x \in \mathfrak{R}^3 / x = (x_1, x_2, x_3)^t, x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = b\}$

unde $\alpha, \beta, b \in \mathfrak{R}$.

a) Determinați valoarea lui $b \in \mathfrak{R}$ astfel încât

$$X \subset \mathfrak{R}^3 / \mathfrak{R} \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in \mathfrak{R}.$$

b) Pentru $\alpha = 1$ și b determinat mai sus, găsiți $\beta \in \mathfrak{R}$

astfel ca $v = (2, 1, -4)^t \in X$.

4. Determinați suma și intersecția subspațiilor vectoriale $U, V \subset \mathfrak{R}^3$, unde

$$U = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathfrak{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathfrak{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$