c o l e c ț i a

concursuri
școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică - Olimpiade și concursuri școlare : clasele IX-XII : 2019-2020 /
Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot, ...,. - Pitești : Paralela 45, 2020
ISBN 978-973-47-3313-2

I. Căiniceanu, Gheorghe
II. Răducan, Emilia-Ștefania
III. Chirfot, Carmen-Victorița

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Gheorghe Căiniceanu
(coordonator)
Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot,
Gabriela-Roxana Bondoc, Mariana Draga-Tătucu,
Daniel Stretcu, Vlad Lungu, Leonard Giugiuc,
Tomiță-Constantin Vasile, Elena Rîmniceanu

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele IX-XII

2019-2020

Editura Paralela 45

ENUNȚURI

clasa a IX-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Argeș

9.O.1. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$, astfel încât $x \cdot y \cdot z = 27$.

a) Arătaţi că $\sqrt{x}+\sqrt{3y}+\sqrt{5z} \le x + y + z$.

b) Precizaţi dacă există numere reale pozitive x, y, z care verifică egalitatea:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}+2y+5z}+\frac{y^2}{\sqrt{3y}+3z+7x}+\frac{z^2}{\sqrt{5z}+x+6y}=1.$$

9.O.2. Fie şirul crescător $x_n \in [0, \infty)$, cu $x_0 = 0$ şi $x_1 = a$, care verifică relaţia: $x_{n+1} = a - x_n + 2\sqrt{x_n x_{n+1}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{a^2+4a\sqrt{x_k x_{k-1}}}$.

9.O.3. Fie $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ punctele de contact ale cercurilor exînscrise cu laturile triunghiului ABC.

a) Calculaţi, în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$, vectorul $\vec{v}=a^2\overrightarrow{AA'}+b^2\overrightarrow{BB'}+c^2\overrightarrow{CC'}$, cu notaţiile obişnuite în triunghiul ABC.

b) Dacă a, b, c sunt numere pozitive în progresie aritmetică, atunci $\vec{v}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AC}$.

9.O.4. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2+31x}+\sqrt{x+31}=x+\sqrt{x}+8$.

Dan Nedeianu, *Gazeta Matematică* nr. 11/2019

Bihor

9.O.5. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + ... + n \cdot f(n) = f(n + 1) - 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

9.O.6. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x^2+31x}+\sqrt{x+31}=x+\sqrt{x}+8$.

Dan Nedeianu, *Gazeta Matematică* nr. 11/2019

9.O.7. Fie rombul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$. Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului MNP aparţine dreptei AC dacă şi numai dacă $AM + DP = BN$.

9.O.8. Se dau numerele $x, y, z > 0$ pentru care $x + y + z = 2$.

a) Demonstraţi că $\frac{x-y}{xy+2z}+\frac{y-z}{yz+2x}+\frac{z-x}{zx+2y}=0$.

b) Demonstraţi că $\frac{x}{xy+2z}+\frac{y}{yz+2x}+\frac{z}{zx+2y}\geq\frac{9}{8}$.

Braşov

9.O.9. a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, m număr par. Demonstraţi că dacă $\sqrt{2} < \frac{m}{n}$, atunci $\sqrt{2} < \frac{m}{n} - \frac{1}{mn}$.

b) Fie $a \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $\sqrt{2} < a$. Demonstraţi că există $a' \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\sqrt{2} < a' < a$.

Romeo Ilie

9.O.10. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $3\{x\}^2 + 11\{x\} = 7x - 5$. Prin $\{x\}$ am notat partea fracţionară a numărului real x.

Ioana Maşca

9.O.11. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n - 2$ şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}^*$, distincte două câte două. Demonstraţi că dacă $a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n^2+n+2k}{2}$, atunci printre numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ există $n - k$ numere naturale consecutive.

Romeo Ilie

9.O.12. Se dă un patrulater $ABCD$ înscris în cercul de centru O şi fie H, K ortocentrele triunghiurilor ACD, respectiv BCD. Fie L mijlocul laturii AB. Ştiind că O este centrul de greutate al triunghiului HKL, arătaţi că $ABCD$ este trapez isoscel.

Brăila

9.O.13. Fie $ABCDE$ un pentagon convex şi punctele $P \in (DE)$, $Q \in (CD)$, astfel încât $\frac{PE}{PD}=\frac{QC}{QD}=2$.

Dacă M şi N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi ABE, arătaţi că $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.

Traian Tămâian

9.O.14. Fie a_n al n-lea număr prim, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $a_n > 3n$, $\forall\, n \geq 12$.

b) Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n < 198$.

9.O.15. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left[\frac{6x+7}{10}\right]-\left\{\frac{3x+11}{5}\right\}=\frac{x+1}{5}$. (S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x şi cu $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x.)

Nicolae Stănică

9.O.16. Se consideră punctul M în interiorul triunghiului ABC. Se notează $AM \cap BC = \{D\}$, $BM \cap AC = \{E\}$, $CM \cap AB = \{F\}$. Determinaţi poziţia punctului M pentru care produsul $\frac{MA}{MD} \cdot \frac{MB}{ME} \cdot \frac{MC}{MF}$ este minim.

Nazeli Boicescu

București

9.O.17. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{4n+1} + \sqrt{9n+13}$ este număr raţional.

Valentin Nicula

9.O.18. Fie numerele reale a şi b cu proprietatea $[|a+b|] < 4$. Arătaţi că $[ab] < 4$. (Pentru a real se notează $[a]$ partea întreagă a lui a şi $|a|$ modulul lui a.)

Mircea Țeca

9.O.19. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuaţia $x^2 - y! = 2019$. (Pentru n natural nenul se notează $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, iar $0! = 1$.)

Costin Negrii, *Gazeta Matematică* nr. 10/2019

9.O.20. În pătratul $ABCD$, fie $M \in AC$. Paralela prin M la AD intersectează BD în N, paralela prin N la DC intersectează AC în P, iar paralela prin P la BC intersectează DB în Q. Punctele O_1, O_2, O_3 şi O_4 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MAB, NAB, PCB, respectiv NBC. Demonstraţi că $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} = \overrightarrow{QN}$.

Petre Simion şi Cristian Ciobănescu

Caraș-Severin

9.O.21. Fie $a, b, c \geq 0$ şi $a + b + c = 1$. Arătaţi că $\frac{a^2}{a^3+5} + \frac{b^2}{b^3+5} + \frac{c^2}{c^3+5} \leq \frac{1}{4}$.

9.O.22. a) Dacă $(x_n)_{n\geq1}$ este o progresie geometrică, se notează $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Calculaţi S_9, ştiind că $S_3 = 40$ şi $S_6 = 60$.

b) Calculaţi suma elementelor mulţimii $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left[\frac{2x+3}{4}\right] = 1 + \{2x\} \right\}$, unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real a.

9.O.23. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu $AB = 3$ şi punctele P, Q, G, R, S, astfel încât:

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC},\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0},\ \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RG} \text{ şi } \overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{SC}.$$

a) Calculaţi lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$.

b) Arătaţi că există un număr raţional r pentru care punctele B, R, S sunt coliniare.

9.O.24. Se dă patrulaterul convex $ABCD$ şi O intersecţia diagonalelor sale, $a > 0$ şi $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = a$.

a) Dacă $a = 1$, atunci $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$.

b) Dacă $a \neq 1$ şi $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Cluj

9.O.25. Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{2x+3}{x-1}\right]+\left\{\frac{2x+1}{x-2}\right\}=\frac{13}{9}$.

Camelia Maria Chindriș și Corina Livia Dragoș

9.O.26. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, astfel încât $a + b + c = 1$, atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$. În ce condiţii are loc egalitatea?

Anca Cristina Hodorogea

9.O.27. Arătaţi că ecuaţia $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 + ... + (x + 2019)^2 = y^2$ nu are soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Eugen Jecan

9.O.28. Se consideră triunghiul ABC, iar D, E şi F punctele în care bisectoarele unghiurilor BAC, ABC şi, respectiv, ACB intersectează cercul circumscris triunghiului ABC. Arătaţi că dacă $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$, atunci triunghiul ABC este echilateral, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Camelia Maria Chindriș și Corina Livia Dragoș

Constanța

9.O.29. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $[x^2] \cdot \{1 + x^2\} = x^2 - 1$, unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului a.

9.O.30. Fie $a, b, c \in [1, +\infty)$. Arătaţi că $\frac{a}{a+2\sqrt{b}+c}+\frac{b}{b+2\sqrt{c}+a}+\frac{c}{c+2\sqrt{a}+b}\geq\frac{3}{4}$.

Alexandru Cărnaru

9.O.31. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$. Arătaţi că tripletul $\left(c,\ a+b,\ 2c+\frac{ab}{c}\right)$ nu poate forma o progresie geometrică.

Nelu Chichirim

9.O.32. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc, în exterior, pătratele $ABDE$, $ACFG$ şi $BCHI$. Arătaţi că:

a) dacă M este ales astfel încât $BIMD$ să fie paralelogram, atunci $BMAG$ este paralelogram;

b) triunghiurile ABC şi DGH au acelaşi centru de greutate;

c) cu segmentele CD, AH şi BG se poate construi un triunghi.

Cătălin Zîrnă

Covasna

9.O.33. Rezolvaţi ecuaţia $\left[\frac{x^2+x}{2}+2019\right]=|\,x+2020\,|$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a şi $|\,a\,|$ modulul său.

9.O.34. Arătaţi că pentru orice număr natural n, $n \geq 2$, numărul $\sqrt{2020^n - 2021}$ nu este natural.

clasa a X-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Argeș

10.O.1. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{1}{a^x + b^{2x}} + \frac{1}{a^{2x} + b^x} + \frac{1}{(ab)^x + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^x} + \frac{1}{b^x} + \frac{1}{(ab)^x}\right)$.

Marian Cucoaneș, *Gazeta Matematică* nr. 2/2014 (generalizare)

b) $\log_{2020}\left(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2\right) = \log_2 x$.

10.O.2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale pozitive sistemul:

$$2\log_2[x] + \{\log_2 y\} = 2\log_2[y] + \{\log_2 z\} = 2\log_2[z] + \{\log_2 x\} = 2.$$

10.O.3. Fie $x, y \in \mathbb{C}$, astfel încât $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1$ și $n \in \mathbb{N}$. Calculați $\left(\frac{x}{y}\right)^{3n+1} + \left(\frac{y}{x}\right)^{3n+1}$.

10.O.4. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $|z| = 1$, $z_1 = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{2020}$, $z_2 = z^{2020} - 1$.

a) Arătați că modulul numărului complex z_1 aparține mulțimii $\mathbb{Q}$.

b) Arătați că modulul numărului complex z_2 aparține mulțimii $\mathbb{Q}$.

Bihor

10.O.5. Fie numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_{2020}$, fiecare având modulul egal cu 1 și $z_1 + z_2 + \ldots + z_{2020} = 0$. Arătați că $\sum_{k=1}^{2020} |z - z_k| \geq 2020$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

10.O.6. Determinați $x, y \in (0, +\infty)$, astfel încât $\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) = 3\lg\left(\frac{x}{2020}\right) \cdot \lg\left(\frac{2020}{y}\right)$.

10.O.7. Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{4x-5} + \sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{2x-1}$ în $\mathbb{R}$.

10.O.8. Determinaţi funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ care verifică simultan condiţiile:

i) $f(x) \le 5^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x + y) \le f(x) \cdot f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

Brașov

10.O.9. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2020x$ şi $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = \left[\dfrac{x}{2020}\right]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

a) Arătaţi că $g \circ f = 1_{\mathbb{Z}}$, unde $1_{\mathbb{Z}}$ este funcţia identică a mulţimii $\mathbb{Z}$.

b) Este g inversa lui f? Justificaţi răspunsul!

10.O.10. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{-\sin^2 x} + 2^{-\cos^2 x} = \sin x + \cos x$.

Aurel Bârsan

10.O.11. Fie n un număr natural nenul fixat. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt[2019]{x^n} = y - z \\ \sqrt[2019]{y^n} = z - x \\ \sqrt[2019]{z^n} = x - y \end{cases}.$$

Cătălin Ciupală

10.O.12. Se consideră numerele complexe z_1, z_2 şi z_3, distincte două câte două, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Ştiind că $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = 3$, calculaţi $|z_1^{2020} + z_2^{2020} + z_3^{2020}|$.

Aurel Bârsan

Brăila

10.O.13. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2|$. Arătaţi că $|z_1 + z_2| \le 2$ sau $|2z_1 + z_2| \ge 3$.

Traian Tămâian

10.O.14. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $100^{\lg 5^{\{x\}}} = \sqrt{5}^{\,2-x}$. (S-a notat cu $\{x\}$ partea fracţionară a numărului real x.)

Roxandra Murea

10.O.15. Rezolvaţi ecuaţia $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} + \dfrac{x^2 - x + 1}{x} = 4 - 2^{x-2} - 2^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}$.

Nicolae Stănică

10.O.16. Fie $x, y > 0$ şi $xy + 2x + 2y \ge 3$. Demonstraţi că:

$$\frac{x^2}{2x + x^4 + y^2} + \frac{y^2}{x \cdot y + y^4 + 4} + \frac{4}{x^2 + 2y + 16} \le 1.$$

Carmen Botea și Viorel Botea

București

10.O.17. Determinaţi toate funcţiile injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$2 + f(x + y) = f\left(f(x) + y\right),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Ana-Maria Petriceanu și Daniel Petriceanu

10.O.18. Fie $u, v \in \mathbb{C}$, astfel încât $|u| = |v|$ şi $2|u + v| \geq |u + 3v|$. Arătaţi că $u = v$.

Constantin Nicolau, *Gazeta Matematică* nr. 4/2019

10.O.19. Rezolvaţi ecuaţia $5 + \log_{12} \dfrac{x}{x^3 + 16} = x + \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Eugen Radu

10.O.20. Rezolvaţi ecuaţia $\cos^5 x \cdot \cos 5x - \sin^5 x \cdot \sin 5x = 1$.

Mihail Bălună

Caraș-**S**everin

10.O.21. Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{1 - x^2} = 3x - 4x^3$.

10.O.22. a) Determinaţi numărul real m pentru care punctele A, B, C având afixele $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4i$, $z_3 = -1 + m \cdot i$ sunt coliniare ($i^2 = -1$).

b) Arătaţi că, dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, atunci $|z| = 1$ dacă şi numai dacă există un număr real a, astfel încât $z = \dfrac{1 + ai}{1 - ai}$.

10.O.23. Arătaţi că $\dfrac{1}{\log_{a_1} a_2} + \dfrac{1}{\log_{a_2} a_3} + \ldots + \dfrac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n,\ \forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$.

10.O.24. Se consideră mulţimea M a funcţiilor injective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x) \cdot f(1 - x) = f(ax + b),\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

unde a şi b sunt numere reale. Arătaţi că:

a) $a = 0$; b) $f(1 - b) = 1$; c) f nu este surjectivă; d) $M \neq \varnothing$.

Cluj

10.O.25. Rezolvaţi ecuaţia $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[7]{x} = \log_4\left(\sqrt[3]{x} + 1909\right)$.

Flavia Marilena Zeriu

10.O.26. Demonstraţi că

$$5\left(\sqrt[5]{\log_a b} + \sqrt[5]{\log_b c} + \sqrt[5]{\log_c a}\right) \leq 2(\log_b a + \log_c b + \log_a c) + 9,\ \forall\, a, b, c \in (1, \infty).$$

Marilena Faiciuc

10.O.27. Rezolvaţi în mulţimea $(-1, +\infty)$ ecuaţia:

$$(x^2 + 4 \cdot x + 3)^x + (2 \cdot x + 4)^x = (x^2 + 4 \cdot x + 5)^x.$$

Gheorghe Lobonț

10.O.28. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ şi $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Arătaţi că:

$$\frac{1}{z_1^{2019}} + \frac{1}{z_2^{2019}} + \frac{1}{z_3^{2019}} + \frac{1}{z_4^{2019}} = 0.$$

Dana Bodea

Constanța

10.O.29. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $9^x + 40^x = 24^x + 25^x$.

10.O.30. Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{7x + 2} \cdot \sqrt{8x + 4} + \sqrt{11x + 6} \cdot \sqrt{12x + 12} = \sqrt{(19x + 9)(21x + 18)}.$$

Cristina Homentcovschi

10.O.31. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demonstraţi echivalenţa:

$$|(z - z_1)(z - z_2)| \le 1, \ \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0.$$

Nelu Chichirim

10.O.32. Fie M o mulţime de numere naturale nenule cu cel puţin două elemente şi o funcţie bijectivă $f : M \to M$. Arătaţi că nu există funcţiile $g, h : M \to M$, astfel încât g să fie injectivă, h să fie surjectivă şi $f(n) = g(n)h(n)$ pentru orice $n \in M$.

Cătălin Zîrnă

Covasna

10.O.33. Fie $z = \dfrac{\sqrt{3} + i}{1 - i} \in \mathbb{C}$. Determinaţi $x \in \mathbb{C}$ care verifică relaţia $x^3 + z^{12} = 0$.

10.O.34. Rezolvaţi ecuaţia $\log_2 (x + 1) \cdot \log_2 (x - 1) = \log_2 (x^3 + x^2 - x - 1) - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

10.O.35. Rezolvaţi ecuaţia $x^3 = 6 + \sqrt[3]{x + 6}$, $x \in \mathbb{R}$.

10.O.36. a) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ şi $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Arătaţi că $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

b) Dacă $z_k \in \mathbb{C}$ sunt soluţiile ecuaţiei $|z|^2 + \overline{z} = 1 - i$, calculaţi z_k^{8n}, $n \ge 1$, $k \in \{1, 2\}$.

Dâmbovița

10.O.37. Fie $u, v \in \mathbb{C}$, astfel încât $|u| = |v|$ şi $2|u + v| \ge |u + 3v|$. Demonstraţi că $u = v$.

10.O.38. Fie $a, b \in (1, \infty)$. Rezolvaţi ecuaţia $a^x b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}} b^x = 2ab$.

CUPRINS