colecția

concursuri școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : Olimpiade și concursuri școlare : clasele VII-VIII : 2019-2020 / Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot, ... - Pitești : Paralela 45, 2020
ISBN 978-973-47-3312-5

I. Căiniceanu, Gheorghe
II. Răducan, Emilia-Ștefania
III. Chirfot, Carmen-Victorița

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

GHEORGHE CĂINICEANU
(coordonator)
EMILIA-ȘTEFANIA RĂDUCAN, CARMEN-VICTORIȚA CHIRFOT,
GABRIELA-ROXANA BONDOC, MARIANA DRAGA-TĂTUCU,
DANIEL STRETCU, VLAD LUNGU, LEONARD GIUGIUC,
TOMIȚĂ-CONSTANTIN VASILE, ELENA RÎMNICEANU

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele VII-VIII

2019-2020

Editura Paralela 45

clasa a VII-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

7.O.1. Arătaţi că $\dfrac{a}{\sqrt{673\cdot 875-b}}>1$, unde:

$a = 27\sqrt{27}+48\sqrt{48}+75\sqrt{75}+\sqrt{1875}$, iar $b = \left(1+\dfrac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2}{6}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2}{7}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{2}{2018}\right)$.

7.O.2. a) Determinaţi numărul natural $n = \overline{ab}$, pentru care $7\sqrt{n} = 4(a + b)$.

b) Găsiţi numerele naturale $\overline{abcd}$, pentru care este adevărată relaţia:

$$\sqrt{1\cdot\sqrt{a}+2\cdot\sqrt{b}+3\cdot\sqrt{\overline{cb}}+4\cdot\sqrt{c}}=d.$$

7.O.3. Se dă $\Delta ABC \equiv \Delta CDE$, cu $AB \equiv AC \equiv CD \equiv CE$, $\sphericalangle ACD = 90°$, A şi E de o parte şi de alta a lui BC. Dacă M, respectiv N sunt mijloacele segmentelor AD, respectiv BE, iar P este simetricul lui M faţă de N, arătaţi că $BMEP$ este pătrat.

7.O.4. În pătratul $ABCD$ de centru O, fie $M \in BD$, $N \in AC$, astfel încât $DM = NO = \dfrac{AC}{4}$ şi $E, F \in DC$, astfel încât $DE = EF = \dfrac{DC}{3}$. Arătaţi că:

a) punctele A, M, E sunt coliniare;

b) $FO \perp BN$;

c) are loc relaţia $6 \cdot GO = AE$, unde $AF \cap OE = \{G\}$.

Arad

7.O.5. Fie $x = 1+\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}+\ldots+\sqrt{5^{2019}}$.

a) Arătaţi că $x + 5^{1010} = x\sqrt{5}+1$.

b) Arătaţi că $\dfrac{4x}{\sqrt{5}+1}+1$ este pătratul unui număr natural.

7.O.6. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB < CD$, $AC \perp BD$. Dacă N este un punct oarecare pe segmentul OC, unde $AC \cap BD = \{O\}$ şi P este intersecţia perpendicularei din C pe DN cu dreapta BD, arătaţi că $BN \perp AP$.

7.O.7. a) Determinaţi numerele naturale de forma $\overline{ab}$, scrise în baza 10 cu cifre distincte, astfel încât $a + b = 10$ şi $\left[\sqrt{\overline{ab}}\right] = 6$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

b) Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$, scrise în baza 10 cu cifre distincte, astfel încât $a \cdot b = c$ şi $n = \sqrt{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} - \left(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}\right) - (a + b + c)}$ este număr natural.

7.O.8. Fie dreptunghiul $MNPQ$, S simetricul punctului P faţă de N, $QS \cap MN = \{R\}$, $PR \cap MQ = \{T\}$.

a) Demonstraţi că $TS = MN$.

b) Dacă $PR \cap QN = \{A\}$, demonstraţi că $AT = 2 \cdot PA$.

Argeș

7.O.9. a) Aflaţi numerele întregi x, diferite de -1, astfel încât $\sqrt{\dfrac{x - 2010}{x + 1}}$ să fie număr întreg.

Gazeta Matematică nr. 5/2011

b) Fie $a_1, a_2, ..., a_{2020}$ numere naturale impare. Arătaţi că numărul $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2020}^2 - 1}$ este iraţional.

7.O.10. a) Arătaţi că ecuaţia $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1006}} + \dfrac{1}{\sqrt{2012 - x} + \sqrt{1006}} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2012 - x}}$ are 2013 soluţii în mulţimea numerelor întregi.

Gazeta Matematică nr. 3/2013

b) Dacă $a = \dfrac{1}{63} + \dfrac{2}{62} + \dfrac{3}{61} + ... + \dfrac{63}{1}$ şi $b = \dfrac{1}{64} + \dfrac{2}{63} + \dfrac{3}{62} + ... + \dfrac{64}{1}$, arătaţi că $b - a > 3$.

7.O.11. Se consideră paralelogramul $ABCD$. O dreaptă d taie laturile AD şi BC în punctele M, respectiv N, astfel încât $AM = CN$, M între A şi D, N între B şi C. De asemenea, o altă dreaptă s taie laturile AB şi CD în punctele P, respectiv Q, astfel încât $AP = CQ$, P între A şi B, Q între C şi D.

a) Arătaţi că dreapta s trece prin mijlocul segmentului MN.

b) Arătaţi că dacă $\mathcal{A}_{MPNQ} = \dfrac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$, atunci M este mijlocul segmentului AD sau P este mijlocul segmentului AB.

7.O.12. Considerăm un cerc de centru O şi triunghiul ABC înscris în cerc, astfel încât $\overset{\frown}{AC} = 120°$, $AD \perp BC$, D situat pe segmentul BC, O situat pe segmentul AD, $DE \perp AC$, $E \in AC$. Dacă M este mijlocul segmentului DE, arătaţi că $AM \perp BE$.

Gazeta Matematică nr. 12/2019 – enunț modificat

Bacău

7.O.13. Sunt date 2019 greutăţi marcate cu masele de 1 g, 2 g, ..., 2019 g.
a) Arătaţi că din oricare 6 greutăţi de mase m, $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, $m + 4$, $m + 5$ se pot forma trei grămăjoare de mase egale.
b) Arătaţi că se pot forma trei grămezi de mase egale cu cele 2019 greutăţi.
c) Dar dacă aveţi 2020 greutăţi marcate cu masele 1 g, 2 g, ..., 2020 g, puteţi forma cu ele trei grămezi de mase egale? Justificaţi răspunsul.

7.O.14. Arătaţi că $\sqrt{2^{2018}+3^{2020}+4^{2022}}$ nu este număr raţional.

7.O.15. Fie paralelogramul $ABCD$. Punctul M este mijlocul laturii BC, O este intersecţia diagonalelor paralelogramului şi $\{N\} = DM \cap AC$. Determinaţi aria paralelogramului $ABCD$, ştiind că aria triunghiului MON este egală cu 2 cm^2.

7.O.16. În triunghiul ABC ascuţitunghic, cu $m(\sphericalangle A) = 60°$, se consideră $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$) şi M mijlocul laturii BC. Arătaţi că triunghiul DEM este echilateral.

Bihor

7.O.17. Punctul D este în interiorul triunghiului ABC, astfel încât unghiurile BAC şi BDC sunt suplementare, (BE este bisectoarea unghiului ABD şi (CE este bisectoarea unghiului ACD. Aflaţi măsura unghiului BEC.

7.O.18. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, iar m şi n divizori ai lui a, cu $m < n$. Arătaţi că $a \cdot (n - m) > m^2$.

7.O.19. Se consideră paralelogramul $ABCD$, E simetricul lui C faţă de B şi $BF \perp AC$, $F \in AC$. Ştiind că $DF \perp FE$, calculaţi $\dfrac{2DC+3DE}{5DC+DE}$.

7.O.20. Fie numerele $x_1, x_2, ..., x_{2022}$, astfel încât $\{x_1, x_2, ..., x_{2022}\} = \{1, 2, ..., 2022\}$. Arătaţi că printre numerele $|x_1 - 1|, |x_2 - 2|, |x_3 - 3|, ..., |x_{2022} - 2022|$ există cel puţin două egale.

Bistriţa-Năsăud

7.O.21. Arătaţi că $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+...+\dfrac{1}{5^{2020}}<\dfrac{5}{4}$.

7.O.22. Câte numere de forma $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, care nu sunt raţionale, există între numerele:

$$a = \sqrt{4\cdot 1\underbrace{00...0}_{9\text{ zerouri}}1^2} \text{ şi } b = \sqrt{2\underbrace{00...0}_{9\text{ zerouri}}3\cdot 2\underbrace{00...03}_{9\text{ zerouri}}}\ ?$$

7.O.23. Fie $ABCD$ paralelogram cu aria $64\sqrt{5}$ cm^2. Dacă E este mijlocul lui AB, aflaţi aria triunghiului DEB.

7.O.24. Fie $\mathscr{C}(O, r)$ şi A un punct exterior cercului, astfel încât unghiul format de tangentele la cerc AM şi AN ($M, N \in \mathscr{C}(O, r)$) are măsura de 30°. Dacă P este mijlocul segmentului AO, arătaţi că triunghiul MNP este echilateral.

Botoșani

7.O.25. Fie numerele:

$$a = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \ldots + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{\sqrt{2024\cdot 2025}} \text{ şi}$$

$$b = \frac{360}{\sqrt{18}} + \frac{5}{\left(3-3\sqrt{2}\right)^{2019}} \cdot \frac{\left(10-6\sqrt{2}\right)^{2020}}{2^{2018}}.$$

Arătaţi că numerele a şi b sunt raţionale.

7.O.26. a) Arătaţi că există cel puţin o pereche de numere naturale (x, y), astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2019}$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2019}$. Arătaţi că $\sqrt{\left(\frac{x}{3}-673\right)\left(\frac{y}{3}-673\right)} \in \mathbb{N}$.

7.O.27. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi BCF.

a) Demonstraţi că dreptele AF şi DE sunt perpendiculare.

b) Dacă $AF \cap CE = \{P\}$, arătaţi că B, P şi D sunt puncte coliniare.

7.O.28. În triunghiul ABC ascuţitunghic, cu $\sphericalangle A = 60°$, se consideră $BD \perp AC$, $D \in (AC)$, $CE \perp AB$, $E \in (AB)$ şi M mijlocul laturii BC. Arătaţi că triunghiul DEM este echilateral.

Brașov

7.O.29. Fie numerele $x = 1+\sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\ldots+\sqrt{3^{2020}}$ şi $y = 3^{1011} - \sqrt{3}$. Calculaţi partea întreagă a numărului $\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{y}{x}$.

Ioana Mașca

7.O.30. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $\left|x-\frac{3}{2}\right|+\left|x-1\right| = x-2$;

b) $\left[x-\frac{3}{2}\right]+\left[x-1\right] = x-2$.

clasa a VIII-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

8.O.1. a) Arătaţi că $\left(\frac{5}{2a+1}-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{2a^2+3a+1}\right):\frac{3a+3}{2a^2-a-1}\cdot(a+1)<a^2-a$, pentru orice $a\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

b) Aflaţi minimul expresiei $E = a^2 + b^2 - ab - a - b + 2021$.

8.O.2. a) Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{x-\sqrt{11+\sqrt{x^2}}}=1$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$.

8.O.3. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ cu $AB = 2a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, $AE = a\sqrt{3}$. Arătaţi că:

a) $AC + AF + AH \geq \left(3a\sqrt{3}+2a\right)\sqrt{2}$;

b) dacă M este mijlocul muchiei AE, iar $AH \cap MD = \{S\}$, $AF \cap MB = \{T\}$, atunci $ST \parallel (FCH)$.

8.O.4. Fie triunghiul echilateral ABC de latură a, $D \in AB$, astfel încât $AD = \frac{a}{6}$ şi ducem $DE \perp AB$, $E \in AC$, unde se ridică $ME \perp (ABC)$.

a) Arătaţi că $MC^2 > MA \cdot MB$.

b) Aflaţi lungimea segmentului ME, dacă $3 \cdot MD = 2\sqrt{3} \cdot ME$.

Arad

8.O.5. Se consideră $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $4x^2 + y^2 + 4x - 12y = 12$. Arătaţi că $x \in [-4; 3]$ şi $y \in [-1; 13]$.

8.O.6. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $3^y + 1 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$.

8.O.7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură a. Dacă M, N, P, M', N', P' sunt mijloacele muchiilor (AD), (AB), (AA'), $(B'C')$, $(D'C')$, respectiv (CC'):

a) demonstraţi că planele (MNP) şi $(M'N'P')$ sunt paralele;

b) calculaţi distanţa de la punctul A la planul (MNP).

8.O.8. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului VAC, F este centrul de greutate al triunghiului ABD, iar M este mijlocul segmentului BG, demonstraţi că $FM \parallel (VCD)$.

Argeș

8.O.9. a) Arătaţi că $a^2 + b^2 \geq 2ab$, oricare ar fi numerele $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a, b > 0$.

b) Fie $x, y, z > 0$ numere reale cu $xyz = 6$. Arătaţi că:

$$\frac{2x}{(2x^2+y^2)(x^2+2z^2)}+\frac{3y}{(3y^2+z^2)(y^2+3x^2)}+\frac{5z}{(5z^2+x^2)(z^2+5y^2)}\leq\frac{1}{8}.$$

Delia Schneider, *Gazeta Matematică* nr. 11/2017

8.O.10. Fie numerele reale x, y, z care satisfac relaţiile:

$$\left(x-\sqrt{2020}\right)\left(x+\sqrt{2020}\right)+\sqrt{2018}\cdot y\cdot\left(2x+\sqrt{2018}\cdot y\right)=2019\cdot z^2 \text{ şi}$$

$$x+\sqrt{2018}\cdot y+\sqrt{2019}\cdot z=1010.$$

Arătaţi că $x+\sqrt{2018}\cdot y-\sqrt{2019}\cdot z$ este număr prim.

8.O.11. O prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ are bazele triunghiuri echilaterale cu latura de lungime a. Ştiind că dreptele AB' şi BC' sunt perpendiculare, aflaţi:

a) lungimea muchiei laterale;

b) o funcţie trigonometrică a unghiului format de planele (BMC') şi (ABC), unde M este mijlocul muchiei AC.

8.O.12. Prin vârfurile A, B, C ale paralelogramului $ABCD$ se consideră dreptele paralele a, b respectiv c. De aceeaşi parte a planului (ABC), pe dreptele a, b, c se iau punctele A', B', C', astfel încât lungimile segmentelor $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, exprimate în unităţi de lungime, să fie egale cu $AA' = \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{1\cdot 2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2\cdot 3}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n+1+2\sqrt{n\cdot(n+1)}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $BB' = \sqrt{2021}$, $CC' = 1$.

Determinaţi n, astfel încât $D \in (A'B'C')$.

Bacău

8.O.13. a) Demonstraţi că $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi numerele reale x, y, z, pentru care: $\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}+3\sqrt{z-9}=\frac{x+y+z}{2}$.

8.O.14. a) Fie $n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, dacă şi numai dacă n este pătrat perfect.

b) Determinaţi numerele naturale n, pentru care $\sqrt{n^2+8n+51}$ este număr raţional.

8.O.15. Pe planul pătratului $ABCD$ se construieşte perpendiculara SA, astfel încât $SA = AB = a$.

a) Arătaţi că $BD \perp SC$.

b) Calculaţi distanţa dintre dreptele BD şi SC.

c) Dacă M este mijlocul laturii CD, determinaţi distanţa de la punctul S la dreapta BM.

8.O.16. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, se consideră punctele E, F, respectiv F', mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[B'C']$. Muchia bazei este de 6 cm, iar înălţimea $AA' = 9$ cm.

a) Demonstraţi că $AF \perp DE$.

b) Calculaţi tangenta unghiului diedru determinat de planele $(F'DE)$ şi (ABC).

c) Fie punctul P situat pe muchia $[BB']$. Calculaţi lungimea segmentului BP, ştiind că perimetrul triunghiului $A'PF$ este minim.

Bihor

8.O.17. Fie tetraedrul regulat $ABCD$ cu lungimea muchiei de 10 cm. Fie M mijlocul muchiei $[AD]$, N mijlocul muchiei $[BC]$ şi P mijlocul segmentului $[DN]$. Determinaţi:

a) poziţia dreptei MP faţă de planul (ABC);

b) măsura unghiului format de dreptele MN şi BC;

c) distanţa de la punctul C la planul (ABD).

8.O.18. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $7x^2 + 8x + 1 = 4^{2x}$.

8.O.19. Se dau numerele reale $x, y, z > 0$, diferite de 3. Dacă $x + y + z = 3$, arătaţi că:

$$F(x, y, z) = \frac{x-y}{xy+3z} + \frac{y-z}{yz+3x} + \frac{z-x}{zx+3y} \text{ este constantă.}$$

Daniel Stretcu, *Gazeta Matematică* nr. 12/2019

8.O.20. În fiecare din vârfurile unui cub se pune câte un singur fruct. Fructul poate fi banană, portocală sau măr. Prin *platou* se înţelege orice plan care conţine 4 dintre vârfurile cubului. Stabiliţi dacă există o aşezare a fructelor, astfel încât fiecare platou să conţină toate cele trei tipuri de fructe. Justificaţi răspunsul.

Bistrița-Năsăud

8.O.21. Determinaţi numerele reale a, b, c, dacă $a + b + c = 1$ şi $ab + bc + ca \geq \frac{1}{3}$.

8.O.22. Arătaţi că:

a) numărul A este raţional, unde $A = \sqrt{\left(\frac{1}{7-4\sqrt{3}} + \frac{1}{7+4\sqrt{3}}\right) : \frac{2}{7}}$;

b) numărul B este iraţional, unde $B = \sqrt{\left[\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)^n}{4} + \frac{6}{\left(7-4\sqrt{3}\right)^n}\right] : \frac{\left(7-4\sqrt{3}\right)^n}{2}}$.

8.O.23. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul (ABC), $AM = 24$ cm.

a) Determinaţi măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MBC) şi (ABC).

b) Arătaţi că piciorul perpendicularei din A pe planul (MBC) este ortocentrul triunghiului MBC.

8.O.24. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ şi $DO \perp (ABC)$. Dacă $M \in (DO)$, astfel încât $MA \perp MB$, arătaţi că M este mijlocul lui (OD).

Botoșani

8.O.25. a) Se dă expresia $E(x) = \left(\frac{2x}{x^2-2x} - \frac{4x+12}{x^3+3x^2-4x-12} + \frac{x^2}{x^2+2x}\right) \cdot \left(x - \frac{4}{x}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0, 2\}$. Arătaţi că suma $E(1) + E(3) + E(5) + ... + E(2021)$ este pătrat perfect.

b) Arătaţi că $\left(\frac{\sqrt{37}+1}{6}\right)^{2020} + \left(\frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)^{2020} > 2$.

8.O.26. Arătaţi că dacă $5a^2 + 5b^2 - 2a - 12b + \frac{28}{5} = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a + b \in \left[\frac{1}{5}; 2\frac{3}{5}\right]$.

8.O.27. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu muchia $AB = AA' = 12$ cm.

a) Determinaţi poziţia punctului E pe muchia $[AA']$, ştiind că distanţa de la punctul A la planul (EBC) este egală cu $3\sqrt{3}$ cm.

b) Aflaţi sinusul unghiului dintre dreptele AP şi $A'N$, unde N şi P sunt mijloacele muchiilor $[BB']$, respectiv $[CC']$.

8.O.28. Fie tetraedrul $ABCD$, în care $AB \perp CD$. Punctele M şi N sunt mijloacele muchiilor $[BC]$, respectiv $[BD]$. Pe semidreapta $(DM$ alegem punctul E, astfel încât $DE = 2DM$, iar pe semidreapta $(CN$ alegem punctul F, astfel încât $CF = 2CN$.

a) Demonstraţi că dreapta CD este paralelă cu planul (AEF).

b) Demonstraţi că triunghiul AEF este isoscel.

Brașov

8.O.29. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $[2019x] + \{2020x\} = 2020$. Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a şi cu $\{a\}$ partea fracţionară a numărului a.

Ioana Ciocîrlan

8.O.30. Fiind date numerele $A = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ şi $B = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, arătaţi că:

a) $\sqrt{A+B} \notin \mathbb{Q}$, pentru orice număr natural n;

b) unul şi numai unul dintre numerele A şi B este divizibil cu 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Dorina Rapcea

8.O.31. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ şi punctele M şi N mijloacele muchiilor BC, respectiv VD. Arătaţi că $AB = AV$, dacă şi numai dacă măsura unghiului dintre dreptele AB şi MN este egală cu 30°.

8.O.32. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AD \perp (BCD)$, iar $AD^2 = BD^2 + CD^2$. Fie E şi F proiecţiile lui D pe AB, respectiv AC.

a) Ştiind că $EF \cap (BCD) = \{P\}$, astfel încât $BC = 3CP$, aflaţi raportul dintre aria triunghiului AEF şi aria triunghiului ABC.

b) Arătaţi că există un punct $O \in (BCD)$, egal depărtat de punctele B, C, D, E şi F.

Dorina Rapcea

soluții

Clasa a VII-a

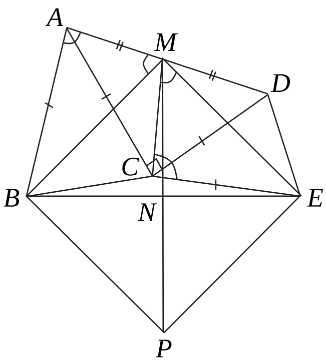
ETAPA LOCALĂ

Alba

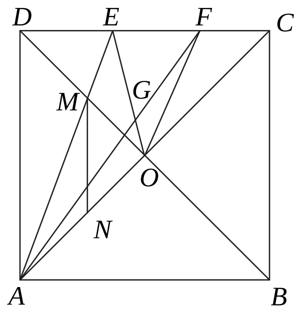
7.O.1. $a = 27\cdot 3\sqrt{3}+48\cdot 4\sqrt{3}+75\cdot 5\sqrt{3}+25\sqrt{3} = 673\sqrt{3}$, $b = \frac{7}{5}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2020}{2018} = \frac{2019\cdot 2020}{5\cdot 6} = 673\cdot 202 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{673\cdot 875-b}} = \frac{673\sqrt{3}}{\sqrt{673\cdot 875-673\cdot 202}} = \frac{673\sqrt{3}}{\sqrt{673\cdot(875-202)}} = \frac{673\sqrt{3}}{673} = \sqrt{3} > 1.$

7.O.2. a) $7\sqrt{n} = 4(a+b) \in \mathbb{N} \Rightarrow 7\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow n$ este pătrat perfect $\Rightarrow n = \overline{ab} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$, dar $7\sqrt{n} \vdots 4$ și cum $7 \not\vdots\, 4 \Rightarrow \sqrt{n} \vdots 4 \Rightarrow n \vdots 16 \Rightarrow n \in \{16, 64\}$. Dacă $n = 16 \Rightarrow 7\cdot 4 = 4(a+b) \Rightarrow 7 = 1 + 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 16$ convine. Dacă $n = 64 \Rightarrow 7\cdot 8 = 4(a+b) \Rightarrow 14 = 6 + 4$, fals. Deci, $\overline{ab} = 16$; b) Cum $d \in \mathbb{N} \Rightarrow a, b, c$ și $\overline{cb}$ pătrate perfecte $\Rightarrow \overline{cb} = 49$, $c = 4$ și $b = 9 \Rightarrow$ egalitatea dată devine $\sqrt{1\sqrt{a}+2\cdot 3+3\cdot 7+4\cdot 2} = d \Rightarrow \sqrt{\sqrt{a}+35} = d$. Cum a – pătrat perfect și a – cifră $\Rightarrow a \in \{0, 1, 4{,}9\}$. Pentru $a = 0 \Rightarrow \sqrt{35} = d$, fals; pentru $a = 1 \Rightarrow \sqrt{36} = d \Rightarrow$ $\Rightarrow d = 6$; pentru $a = 4 \Rightarrow \sqrt{37} = d$, fals; pentru $a = 9 \Rightarrow \sqrt{38} = d$, fals. Deci, $\overline{abcd} = 1946$.



7.O.3. $\Delta ABC \equiv \Delta CDE$ și $AB = AC = CD = DE \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ECD$. Din $AC \equiv$ $\equiv CD$ și $m(\sphericalangle ACD) = 90° \Rightarrow \Delta ACD$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle CDA =$ $= 45°$. ΔACD – isoscel și M – mijlocul lui $AD \Rightarrow CM$ este mediană, înălțime și bisectoarea $\sphericalangle ACD \Rightarrow m(\sphericalangle ACM) = m(\sphericalangle DCM) = 45°$ și $CM = \frac{1}{2}AD = AM =$ $= MD$. $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle CAM) = m(\sphericalangle BAC) + 45°$ și $m(\sphericalangle ECM) =$ $= m(\sphericalangle ECD) + m(\sphericalangle DCM) = m(\sphericalangle ECD) + 45°$ și cum $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ECD \Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv$ $\equiv \sphericalangle ECM$. Dar $AB = CE$ și $AM = CM \overset{\text{(L.U.L.)}}{\Rightarrow} \Delta ABM \equiv \Delta CME \Rightarrow \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CME$ și $BM \equiv ME$. N – mijlocul lui BE și N – mijlocul lui $MP \Rightarrow BMEP$ este paralelogram cu $BM = ME \Rightarrow BMEP$ este romb. Pe de altă parte, $m(\sphericalangle BME) =$ $= m(\sphericalangle BMC) + m(\sphericalangle CME) = m(\sphericalangle BMC) + m(\sphericalangle AMB) = m(\sphericalangle AMC) = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow BMEP$ este pătrat.



7.O.4. a) În ΔAEC, FO – linie mijlocie $\Rightarrow FO \parallel AE$ (1). În ΔDFO, EM – linie mijlocie $\Rightarrow FO \parallel EM$ (2) $\Rightarrow A$, E și M sunt coliniare; b) În ΔADO, MN – linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AD$, dar $AD \perp AB \Rightarrow MN \perp AB$. În ΔABM avem $MN \perp AB$, deci MN este înălțime, $AO \perp BM$, deci AO este înălțime, iar $MN \cap AO \cap BN =$ $= \{N\}$, deci N este ortocentrul triunghiului $ABM \Rightarrow BN \perp AM$; dar $AE \parallel FO$, $M \in AE \Rightarrow FO \perp BN$; c) În ΔAEC avem AF – mediană, EO – mediană și

CUPRINS