Redactare: Daniel Mitran
Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
VLĂDUCU, DANIEL
Memorator de matematică pentru clasele IX-XII / Daniel Vlăducu, Márta Kása. - Ed. a 3-a. - Piteşti : Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3682-9

I. Kása, Márta

51

CUPRINS

ALGEBRĂ

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

- $\left(a \pm b\right)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $\left(a \pm b\right)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = \left(a-b\right)\left(a+b\right)$
- $a^3 - b^3 = \left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$
- $a^3 + b^3 = \left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$
- $a^n - b^n = \left(a-b\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1}\right),\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$
- $a^n + b^n = \left(a+b\right)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+...+b^{n-1}\right),\ \forall n \in 2\mathbb{N}+1$
- $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
- $a^3+b^3+c^3-3abc = \left(a+b+c\right)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\right)$ sau
- $a^3+b^3+c^3-3abc = \left(a+b+c\right)\frac{1}{2}\cdot\left(\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\right);$
- $a^3+b^3+c^3-3abc = \left(a+b+c\right)\left(\left(a+b+c\right)^2-3\left(ab+bc+ac\right)\right);$
- $a^3+b^3+c^3 = \left(a+b+c\right)^3-3(a+b)(b+c)(c+a).$

SUME REMARCABILE

- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

MODULUL

Definiție: Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanţa, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului şi origine.

$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ şi $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

- $|x| \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R};$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y;$
- $|x| < c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c);$
- $|x| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty);$
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|;\ \exists$ „=" $\Leftrightarrow\ xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y \neq 0;$

• $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$ şi $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

PARTEA ÎNTREAGĂ, PARTEA FRACȚIONARĂ

Definiții:

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mic număr întreg cel mult egal cu numărul x şi se notează $[x]$.

Partea fracţionară a lui x se notează $\{x\}$ şi $\{x\} = x - [x]$.

Proprietăți:

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $[m+x] = m + [x],\ \forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\{m+x\} = \{x\},\ \forall m \in \mathbb{Z}$;
- $x - 1 < [x] \le x < [x] + 1$;
- $[x] + \left[x + \dfrac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \dfrac{n-1}{n}\right] = [nx],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \ge 2$ **(Hermite)**.

INEGALITĂȚI REMARCABILE

- Dacă $a \cdot b > 0$, atunci $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2$.
- $x \cdot y \le \dfrac{(x+y)^2}{4},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;

- $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$;
- $3 \cdot \left(xy + yx + zx \right) \leq \left(x + y + z \right)^2 \leq 3 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)$.

Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k)$, unde

$$m_h = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \text{ (media armonică),}$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \text{ (media geometrică),}$$

$$m_a = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + ... + p_n a_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} \text{ (media aritmetică),}$$

$$m_p = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} {a_k}^2}{n}} \text{ (media pătratică).}$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \right)^2 \leq \left({a_1}^2 + ... + {a_n}^2 \right) \cdot \left({b_1}^2 + ... + {b_n}^2 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2$$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

I. ŞIRURI

ȘIRURI MONOTONE

Definiții:

Şirul real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spunem că este:

- **monoton crescător** dacă $a_n \le a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;
- **monoton descrescător** dacă $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;
- **monoton** dacă este monoton crescător sau descrescător;
- **monoton strict crescător** dacă $a_n < a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;
- **monoton strict descrescător** dacă $a_n > a_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;
- **strict monoton** dacă este strict crescător sau strict descrescător.

ȘIRURI MĂRGINITE

Definiție:

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir real. Spunem că $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **mărginit** dacă $\exists\ a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $a \le a_n \le b$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

LIMITA UNUI ȘIR

Avem notaţia $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\} = [-\infty; +\infty]$. Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **dreapta reală încheiată.**

Definiție: Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir real şi $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are **limita *a*** dacă în orice vecinătate a punctului a se află toţi termenii şirului începând de la un anumit rang.

Notație: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ sau $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

• Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir real şi $a \in \mathbb{R}$. Punctul a se numeşte **punct limită** al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există un subşir $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ al acestuia care are limita a.

Proprietate: Şirul real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită dacă şi numai dacă are un singur punct limită.

Consecințe:

1. Şirul real $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu are limită dacă are două puncte limită distincte.

2. Limita unui şir real este unică, dacă aceasta există.

ȘIRURI CONVERGENTE

Definiție: Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita a, cu $a \in \mathbb{R}$, a finit, atunci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **şir convergent**.

Teoreme:

T1 (teorema de convergenţă cu ε). Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir real şi $a \in \mathbb{R}$. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita a dacă şi numai dacă $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (n_ε – un rang care depinde de ε) astfel încât $\forall\ n \geq n_\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, avem $|a_n - a| < \varepsilon$.

T2. Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.

• Şirurile care nu au limită şi cele care au limita $+\infty$ sau $-\infty$ se numesc **şiruri divergente**.

CONVERGENȚĂ ȘI MĂRGINIRE

Observații:

1. Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita a, atunci orice subşir $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ al său are tot limita a.

2. Dacă un şir are un subşir divergent sau are două subşiruri convergente către limite distincte, atunci acel şir este divergent.

Teoremă: Orice şir convergent de numere reale este mărginit.

CRITERII DE CONVERGENȚĂ/DIVERGENȚĂ A ȘIRURILOR

Pentru a stabili convergenţa şirurilor se pot folosi următoarele teoreme:

T1. Orice şir real monoton şi mărginit este convergent.

T2. Criteriul majorării: Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri reale. Dacă $|a_n - a| \le b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

T3. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri convergente şi dacă $a_n \le b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

T4. Teorema cleştelui: Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trei şiruri de numere reale astfel încât $a_n \le b_n \le c_n$ pentru orice $n \ge N$ (N natural fixat). Dacă $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ şi $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, atunci şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita l, $l \in \mathbb{R}$.

T5. Criteriul raportului (Cauchy-D'Alembert): Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are toţi termenii strict pozitivi şi există $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in \mathbb{R}$, atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

T6. Criteriul Cesàro-Stolz: Fie şirurile reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dacă $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescător şi nemărginit şi există $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, $l \in \mathbb{R}$, atunci şirul $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = l$.

OPERAȚII CU ȘIRURI CONVERGENTE

Teoreme:

T1. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri reale convergente, cu $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ şi $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, atunci şirul **sumă** $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + b$.

Se scrie: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

T2. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri reale convergente, cu $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ şi $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, atunci şirul **diferenţă** $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $a_n - b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a - b$.

Se scrie: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

T3. Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt două şiruri reale convergente, cu $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ şi $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, atunci şirul **produs** $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \cdot b$.

Se scrie: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Generalizare: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n \cdot c_n \cdot \ldots \cdot f_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \ldots \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, cu observaţia că teorema rămâne valabilă numai în cazul unui număr finit de factori.

IV. FUNCŢII DERIVABILE

NOȚIUNI GENERALE

Fie funcţia $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, şi $x_0 \in E$ punct de acumulare pentru E.

Definiții:

• Se spune că funcţia f **are derivată în punctul x_0** dacă există limita (finită sau infinită):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{not.}}{=} f'(x_0) .$$

Dacă derivata $f'(x_0)$ există şi este finită, se spune că funcţia f **este derivabilă în punctul x_0**.

• Dacă derivatele la stânga şi la dreapta în x_0 sunt egale, atunci f **are derivată în x_0**:

$$l_s' = l_d' = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Teoreme:

T1. Funcţia f este derivabilă în x_0 dacă este derivabilă la stânga şi la dreapta în x_0. În acest caz are loc relaţia:

$$f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = f'(x_0) .$$

T2. Orice funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acest punct.

Observație: Reciproca acestei teoreme nu este, în general, adevărată.

CLASE DE FUNCȚII DERIVABILE

Toate funcţiile elementare sunt **derivabile** pe domeniul lor de definiţie, cu excepţia funcţiilor **arcsin** şi **arccos**, care sunt derivabile pe $(-1, 1)$, şi, respectiv, **radical**, care este derivabilă pe $D \setminus \{0\}$, unde D este domeniul său maxim de definiţie.

REGULI DE DERIVARE

Fie $f, g : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, două funcţii derivabile pe E. Avem următoarele **reguli de derivare**:

- $(f + g)' = f' + g'$, cu $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $\forall\, x_0 \in E$;
- $(\lambda f)' = \lambda f'$, $\lambda \in \mathbb{R}$, cu $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$, $\forall\, x_0 \in E$;
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, cu
  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$, $\forall\, x_0 \in E$;
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, cu

  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},\ \forall\, x_0 \in E.$$

DERIVATA UNEI FUNCȚII COMPUSE

Fie $f : E \to F$ şi $u : F \to \mathbb{R}$, $E, F \subseteq \mathbb{R}$, două funcţii şi fie $h = f \circ u : E \to \mathbb{R}$, unde $h(x) = f(u(x))$, $\forall\, x \in E$.

Teoremă: Dacă funcţiile u şi f sunt derivabile, atunci funcţia compusă $h = f \circ u$ este derivabilă şi $(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'$.

Deci, $(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$, $\forall\, x \in E$.

DERIVATA UNEI FUNCȚII INVERSE

Teoremă: Fie $f : I \to J$ o funcţie continuă şi bijectivă, cu I, J intervale. Dacă f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ şi $f'(x_0) \neq 0$, atunci inversa ei, f^{-1}, este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi, în plus, $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Deci, $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f \circ f^{-1}}$.

DERIVATELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE ȘI COMPUSE

Funcţii elementare	**Funcţii compuse**
• $c' = 0$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$ constantă	Fie $u \overset{\text{not.}}{=} u(x)$ o funcţie care depinde de $x \in \mathbb{R}$.
• $x' = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$	
• $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$	• $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u$, $n \in \mathbb{N}^*$
• $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$, $r \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$	• $(u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u'$, $r \in \mathbb{R}$
• $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$	• $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2 \cdot \sqrt{u}}$, $u(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$
• $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x \in (0, +\infty)$	• $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $u(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$
• $(e^x)' = e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$	• $(e^u)' = e^u \cdot u'$
• $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$	• $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(\text{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x + 1$, $\cos x \neq 0$
- $(\text{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\sin x \neq 0$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1, 1)$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1, 1)$
- $(\text{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(\text{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $\forall x \in (0, +\infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
- $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
- $(\text{tg}\, u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot (\text{tg}^2 x + 1)$, $\cos u(x) \neq 0$
- $(\text{ctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$, $\sin u(x) \neq 0$
- $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $u(x) \in (-1, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $u(x) \in (-1, 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(\text{arctg}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
- $(\text{arcctg}\, u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
- $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$, $u(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$
- $(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$