

Redactare: Daniel Mitran

Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**VLĂDUCU, DANIEL**

**Memorator de matematică pentru clasele IX-XII / Daniel**

Vlăducu, Márta Kása. - Ed. a 3-a. - Pitești : Paralela 45, 2022

ISBN 978-973-47-3682-9

I. Kása, Márta

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2022

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

# CUPRINS

---

<b>ALGEBRĂ</b> .....	9
1. Formule de calcul prescurtat .....	9
2. Sume remarcabile .....	9
3. Modulul .....	10
4. Partea întreagă, partea fracționară.....	11
5. Inegalități remarcabile .....	11
6. Elemente de logică matematică, mulțimi .....	13
7. Inducție matematică, probleme simple de numărare.....	14
8. Puteri și radicali .....	14
9. Logaritmi .....	15
10. Progresii aritmetice, progresii geometrice.....	16
11. Elemente de combinatorică.....	17
12. Binomul lui Newton.....	18
13. Funcții, funcția de gradul I.....	18
14. Ecuația de gradul al II-lea.....	20
15. Funcția de gradul al II-lea.....	21
16. Funcții injective, surjective, bijective .....	24
17. Funcția putere, funcția radical, ecuații .....	24
18. Funcția exponențială, funcția logaritmică .....	25
19. Funcții trigonometrice.....	26
20. Matematici financiare .....	27
21. Elemente de statistică.....	28
22. Probabilitate .....	29
23. Variabile aleatoare .....	31
24. Numere complexe sub formă algebrică.....	31

25. Aplicații în geometria plană.....	33
26. Forma trigonometrică a unui număr complex, operații, ecuații, aplicații.....	33
27. Permutări .....	34
28. Determinanți .....	35
29. Inversa unei matrice.....	35
30. Rangul unei matrice .....	36
31. Sisteme liniare .....	36
32. Legi de compoziție.....	38
33. Structuri algebrice.....	39
34. Inele de polinoame.....	41
35. Polinoame cu coeficienți complecși.....	43
<b>TRIGONOMETRIE</b> .....	45
1. Elemente de trigonometrie.....	45
2. Formule trigonometrice .....	46
3. Aplicații ale trigonometriei și produsului scalar a doi vectori în geometria plană.....	48
<b>ANALIZĂ MATEMATICĂ</b> .....	51
<b>I. ȘIRURI</b> .....	51
1. Șiruri monotone.....	51
2. Șiruri mărginite.....	51
3. Limita unui șir .....	51
4. Șiruri convergente .....	52
5. Convergență și mărginire.....	53

6. Criterii de convergență/divergență a șirurilor .....	53
7. Operații cu șiruri convergente .....	54
8. Cazuri de trecere la limită rezolvate .....	55
9. Cazuri de nedeterminare (exceptate) .....	57
10. Limite remarcabile de șiruri.....	57
<b>II. LIMITE DE FUNCȚII .....</b>	<b>58</b>
1. Limita unei funcții într-un punct.....	58
2. Limite laterale.....	58
3. Limite remarcabile.....	59
<b>III. FUNCȚII CONTINUE .....</b>	<b>61</b>
1. Noțiuni generale .....	61
2. Clase de funcții continue .....	61
3. Proprietățile funcțiilor continue .....	61
<b>IV. FUNCȚII DERIVABILE.....</b>	<b>63</b>
1. Noțiuni generale .....	63
2. Clase de funcții derivabile .....	63
3. Reguli de derivare.....	64
4. Derivata unei funcții compuse .....	64
5. Derivata unei funcții inverse.....	64
6. Derivatele funcțiilor elementare și compuse.....	65
7. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor.....	67
Teorema lui Fermat .....	67
Teorema lui Rolle.....	67
Teorema lui Cauchy .....	67
Teorema lui Lagrange .....	68
Teorema lui Darboux .....	69

Regula lui l'Hospital .....	69
8. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune.....	70
9. Puncte unghiulare și puncte de întoarcere.....	71
10. Asimptote .....	71
Asimptote orizontale .....	71
Asimptote verticale .....	71
Asimptote oblice .....	72
V. PRIMITIVE .....	73
1. Noțiuni generale .....	73
2. Integrala nedefinită.....	73
3. Clase de funcții care admit primitive .....	74
4. Integrare. Metode de integrare.....	74
Metoda de integrare prin părți.....	74
Metoda schimbării de variabilă .....	75
5. Primitive uzuale.....	75
Primitivele funcțiilor elementare.....	75
VI. INTEGRALE DEFINITE.....	78
1. Diviziuni.....	78
2. Sume Darboux, sume Riemann .....	79
3. Integrala definită.....	80
Funcții integrabile în sens Riemann .....	80
4. Clase de funcții integrabile .....	80
5. Proprietăți ale integralelor definite .....	81
Proprietatea de liniaritate .....	81
Proprietatea de monotonie.....	81
Proprietăți ale integralei ca funcție de interval .....	82

6. Formula Leibniz-Newton .....	82
7. Formula de medie .....	82
8. Formula de integrare prin părți .....	82
9. Formula schimbare de variabilă.....	83
10. Aplicații ale integralelor definite .....	83
<b>GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU</b> ....	<b>85</b>
<b>I. VECTORI LEGAȚI</b> .....	<b>85</b>
1. Noțiuni generale .....	85
Direcție.....	85
Sens.....	85
Lungime .....	85
2. Vectori legați echipolenți.....	86
3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat....	86
<b>II. VECTORI LIBERI</b> .....	<b>87</b>
1. Noțiuni generale .....	87
2. Operații cu vectori liberi.....	87
Adunarea vectorilor liberi .....	87
Scăderea vectorilor liberi .....	88
Înmulțirea unui vector liber cu un număr real .....	88
3. Vectorul de poziție .....	89
4. Vectori paraleli .....	90
5. Lungimea unui vector liber în plan.....	90
6. Produsul scalar a doi vectori liberi în plan.....	91
7. Lungimea unui vector liber în spațiu .....	92
8. Produsul scalar a doi vectori liberi în spațiu .....	92

<b>GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU .....</b>	<b>93</b>
<b>REPER CARTEZIAN ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU.....</b>	<b>93</b>
1. Reperul cartezian .....	93
2. Distanța dintre două puncte în plan .....	95

## ALGEBRĂ



### FORMULE DE CALCUL PRECURTAT

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ ,  $\forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$  sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \frac{1}{2} \left( (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right)$ ;
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \left( (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac) \right)$ ;
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$ .



### SUME REMARCABILE

- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$



$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$



## MODULUL

**Definiție:** Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanța, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului și origine.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } |E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}, \text{ pentru orice}$$

expresie  $E(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proprietăți:**

- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ ;
- $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c)$ ;
- $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$ ;
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ ;  $\exists \text{ „}=\text{”} \Leftrightarrow xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ;
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$ ;

- $\min(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$  și  $\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ .



## PARTEA ÎNTREGĂ, PARTEA FRAȚIONARĂ

*Definiții:*

**Partea întregă** a unui număr real  $x$  este cel mai mic număr întreg cel mult egal cu numărul  $x$  și se notează  $[x]$ .

**Partea fracționară** a lui  $x$  se notează  $\{x\}$  și  $\{x\} = x - [x]$ .

*Proprietăți:*

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ ;
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ ;
- $[m+x] = m + [x]$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ;
- $\{m+x\} = \{x\}$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ ;
- $x-1 < [x] \leq x < [x]+1$ ;
- $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$  (**Hermite**).



## INEGALITĂȚI REMARCABILE

- Dacă  $a \cdot b > 0$ , atunci  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .
- $x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

- $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ;
- $3 \cdot (xy + yx + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$ .

### Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k)$ , unde

$$m_h = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad (\text{media armonică}),$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \quad (\text{media geometrică}),$$

$$m_a = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \quad (\text{media aritmetică}),$$

$$m_p = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}} \quad (\text{media pătratică}).$$

### Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

# ANALIZĂ MATEMATICĂ

## I. ȘIRURI



### ȘIRURI MONOTONE

*Definiții:*

Șirul real  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  spunem că este:

- **monoton crescător** dacă  $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- **monoton descrescător** dacă  $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- **monoton** dacă este monoton crescător sau descrescător;
- **monoton strict crescător** dacă  $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- **monoton strict descrescător** dacă  $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
- **strict monoton** dacă este strict crescător sau strict descrescător.



### ȘIRURI MĂRGINITE

*Definiție:*

Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir real. Spunem că  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este **mărginit** dacă  $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , astfel încât  $a \leq a_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N}$ .



### LIMITA UNUI ȘIR

Avem notația  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\} = [-\infty; +\infty]$ . Mulțimea  $\bar{\mathbb{R}}$  se numește **dreapta reală încheiată**.

*Definiție:* Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir real și  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Spunem că șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are **limita  $a$**  dacă în orice vecinătate a punctului  $a$  se află toți termenii șirului începând de la un anumit rang.

*Notăție:*  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  sau  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ .

• Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir real și  $a \in \mathbb{R}$ . Punctul  $a$  se numește **punct limită** al șirului  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dacă există un subșir  $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  al acestuia care are limita  $a$ .

*Proprietate:* Șirul real  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are limită dacă și numai dacă are un singur punct limită.

*Consecințe:*

1. Șirul real  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nu are limită dacă are două puncte limită distincte.

2. Limita unui șir real este unică, dacă aceasta există.



## ȘIRURI CONVERGENTE

*Definiție:* Dacă șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are limita  $a$ , cu  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a$  finit, atunci  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se numește **șir convergent**.

*Teoreme:*

**T1 (teorema de convergență cu  $\varepsilon$ ).** Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir real și  $a \in \mathbb{R}$ . Șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are limita  $a$  dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  ( $n_\varepsilon$  – un rang care depinde de  $\varepsilon$ ) astfel încât  $\forall n \geq n_\varepsilon$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , avem  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

**T2.** Dacă un șir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.

• Șirurile care nu au limită și cele care au limita  $+\infty$  sau  $-\infty$  se numesc **șiruri divergente**.



## CONVERGENȚĂ ȘI MĂRGINIRE

*Observații:*

1. Dacă șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are limita  $a$ , atunci orice subșir  $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  al său are tot limita  $a$ .

2. Dacă un șir are un subșir divergent sau are două subșiruri convergente către limite distincte, atunci acel șir este divergent.

*Teoremă:* Orice șir convergent de numere reale este mărginit.



## CRITERII DE CONVERGENȚĂ/DIVERGENȚĂ A ȘIRURILOR

Pentru a stabili convergența șirurilor se pot folosi următoarele teoreme:

**T1.** Orice șir real monoton și mărginit este convergent.

**T2. Criteriul majorării:** Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri reale.

Dacă  $|a_n - a| \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$  și  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ .

**T3.** Dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sunt două șiruri convergente și dacă  $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

**T4. Teorema cleștelui:** Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trei șiruri de numere reale astfel încât  $a_n \leq b_n \leq c_n$  pentru orice  $n \geq N$  ( $N$  natural fixat). Dacă  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$  și  $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ , atunci șirul  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are limita  $l, l \in \mathbb{R}$ .

**T5. Criteriul raportului (Cauchy-D'Alembert):** Dacă șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are toți termenii strict pozitivi și există  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, l \in \mathbb{R}$ , atunci șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ .

**T6. Criteriul Cesàro-Stolz:** Fie șirurile reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Dacă  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este strict crescător și nemărginit și există  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} =$

$= l, l \in \mathbb{R}$ , atunci șirul  $\left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ .



## Operații cu Șiruri Convergente

*Teoreme:*

**T1.** Dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sunt două șiruri reale convergente, cu  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  și  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ , atunci șirul **sumă**  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și  $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + b$ .

*Se scrie:*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

**T2.** Dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sunt două șiruri reale convergente, cu  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  și  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ , atunci șirul **diferență**  $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și  $a_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a - b$ .

*Se scrie:*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

**T3.** Dacă  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sunt două șiruri reale convergente, cu  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  și  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ , atunci șirul **produs**  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent și  $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \cdot b$ .

*Se scrie:*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

*Generalizare:*  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n \cdot c_n \cdot \dots \cdot f_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \dots \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ , cu observația că teorema rămâne valabilă numai în cazul unui număr finit de factori.

## IV. FUNCȚII DERIVABILE



### NOȚIUNI GENERALE

Fie funcția  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}$ , și  $x_0 \in E$  punct de acumulare pentru  $E$ .

*Definiții:*

- Se spune că funcția  $f$  **are derivată în punctul  $x_0$**  dacă există limita (finită sau infinită):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{not.}}{=} f'(x_0).$$

Dacă derivata  $f'(x_0)$  există și este finită, se spune că funcția  $f$  **este derivabilă în punctul  $x_0$** .

- Dacă derivatele la stânga și la dreapta în  $x_0$  sunt egale, atunci  $f$  **are derivată în  $x_0$** :

$$l'_s = l'_d = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

*Teoreme:*

**T1.** Funcția  $f$  este derivabilă în  $x_0$  dacă este derivabilă la stânga și la dreapta în  $x_0$ . În acest caz are loc relația:

$$f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0).$$

**T2.** Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acest punct.

*Observație:* Reciproca acestei teoreme nu este, în general, adevărată.



### CLASE DE FUNCȚII DERIVABILE

Toate funcțiile elementare sunt **derivabile** pe domeniul lor de definiție, cu excepția funcțiilor **arcsin** și **arccos**, care sunt derivabile pe  $(-1, 1)$ , și, respectiv, **radical**, care este derivabilă pe  $D \setminus \{0\}$ , unde  $D$  este domeniul său maxim de definiție.





## REGULI DE DERIVARE

Fie  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}$ , două funcții derivabile pe  $E$ . Avem următoarele **reguli de derivare**:

- $(f + g)' = f' + g'$ , cu  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ,  $\forall x_0 \in E$ ;
- $(\lambda f)' = \lambda f'$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , cu  $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ ,  $\forall x_0 \in E$ ;
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ , cu  
 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ ,  $\forall x_0 \in E$ ;
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ , cu  
 $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ ,  $\forall x_0 \in E$ .



## DERIVATA UNEI FUNCȚII COMPUSE

Fie  $f : E \rightarrow F$  și  $u : F \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E, F \subseteq \mathbb{R}$ , două funcții și fie  $h = f \circ u : E \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $h(x) = f(u(x))$ ,  $\forall x \in E$ .

**Teoremă:** Dacă funcțiile  $u$  și  $f$  sunt derivabile, atunci funcția compusă  $h = f \circ u$  este derivabilă și  $(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'$ .

Deci,  $(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$ ,  $\forall x \in E$ .



## DERIVATA UNEI FUNCȚII INVERSE

**Teoremă:** Fie  $f : I \rightarrow J$  o funcție continuă și bijectivă, cu  $I, J$  intervale. Dacă  $f$  este derivabilă într-un punct  $x_0 \in I$  și  $f'(x_0) \neq 0$ ,

atunci inversa ei,  $f^{-1}$ , este derivabilă în punctul  $y_0 = f(x_0)$  și, în

$$\text{plus, } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

$$\text{Deci, } (f^{-1})' = \frac{1}{f \circ f^{-1}}.$$



## DERIVATELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE ȘI COMPUSE

Funcții elementare	Funcții compuse
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>c' = 0, \forall c \in \mathbb{R}</math> constantă</li> <li>• <math>x' = 1, \forall x \in \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*,</math> <math>\forall x \in \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, r \in \mathbb{R},</math> <math>\forall x \in (0, +\infty)</math></li> <li>• <math>(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}},</math> <math>\forall x \in (0, +\infty)</math></li> <li>• <math>(\ln x)' = \frac{1}{x}, \forall x \in (0, +\infty)</math></li> <li>• <math>(e^x)' = e^x, \forall x \in \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a &gt; 0, a \neq 1,</math> <math>x \in \mathbb{R}</math></li> </ul>	<p>Fie <math>u = u(x)</math> o funcție care depinde de <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', n \in \mathbb{N}^*</math></li> <li>• <math>(u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u', r \in \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2 \cdot \sqrt{u}}, u(x) &gt; 0,</math> <math>\forall x \in \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>(\ln u)' = \frac{u'}{u}, u(x) &gt; 0,</math> <math>\forall x \in \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>(e^u)' = e^u \cdot u'</math></li> <li>• <math>(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u',</math> <math>a &gt; 0, a \neq 1</math></li> </ul>

- $(\sin x)' = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\cos x)' = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1,$   
 $\cos x \neq 0$
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$   
 $\sin x \neq 0$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$   
 $\forall x \in (-1, 1)$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$   
 $\forall x \in (-1, 1)$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$   
 $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$   
 $\forall x \in \mathbb{R}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$   
 $\forall x \in (0, +\infty), a > 0, a \neq 1$

- $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
- $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
- $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} =$   
 $= u' \cdot (\operatorname{tg}^2 u + 1), \cos u(x) \neq 0$
- $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u},$   
 $\sin u(x) \neq 0$
- $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$   
 $u(x) \in (-1, 1), \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$   
 $u(x) \in (-1, 1), \forall x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
- $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}, u(x) > 0,$   
 $\forall x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$
- $(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u +$   
 $+ v \cdot u^{v-1} \cdot u'$