Maria Zaharia

Caiet de vacanță
Matematică
Clasa a VI-a

Suport teoretic, exerciții și probleme aplicative

Ediția a III-a

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 5318/21.11.2019.

Redactare: Alina Costache
Corectură: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Mariana Dumitru
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZAHARIA, MARIA
Caiet de vacanță - matematică : clasa a VI-a : suport teoretic, exerciții și probleme aplicative / Maria Zaharia. - Ed. a 3-a, - Pitești : Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3584-6

51

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1 Mulțimi

1. a) Mulțimea este .... bine determinate și distincte numite ....

b) Mulțimile se notează cu .... , cu sau fără indici: A, B, C, ... , A_1, A_2, A_3, ...

c) Elementele unei mulțimi se notează cu .... : a, b, ...

d) Mulțimea care nu are nici un element se numește .... și se notează cu simbolul ....

2. a) Dacă A este o mulțime și x este un element al ei, atunci notăm .... și citim ....

b) O mulțime se numește numerică dacă ....

3. Orice mulțime poate fi dată în trei moduri:

a) **explicit**, prin .... ;

b) **implicit**, ... ;

c) **cu ajutorul unor diagrame Venn–Euler** ....

4. Mulțimea numerelor naturale mai mici decât 5 reprezentată:

a) explicit este $M =$ ....

b) printr-o proprietate caracteristică este $M =$ ....

c) cu ajutorul diagramei Venn–Euler este:

5. O mulțime A se numește:

a) **mulțime finită** dacă .... , de exemplu: mulțimea divizorilor numărului 6 este D_6 ....

b) **mulțime infinită** .... , de exemplu: mulțimea multiplilor unui număr natural este .... $M_6 =$ ....

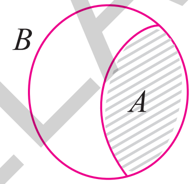
6. Numărul de elementelor ale unei mulțimi A se notează cu .... și card D_6 = ...

7. a) **Două mulțimi A și B sunt egale** dacă ………………………………………… și notăm ……………… în caz contrar spunem că …………………… și notăm …………………… .

b) Mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \le 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sunt …………………………… și notăm …………………………… .

c) Mulțimile $M = \{1, 2, 3\}$ și $N = \{a, b, c\}$ sunt …………………………… și notăm ……………… , însă au același număr de elemente, mai precis card $M =$ ………… $=$ ………… .

8. a) **O mulțime A** este **submulțime a mulțimii B** dacă …………………………………………………… .



$A \subset B$

Se notează $A \subseteq B$ și se citește „……………………………………”.

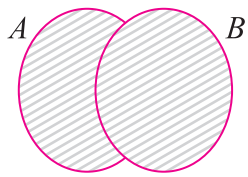
b) Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B, atunci …………………………… și notăm …………………… .

9. a) Mulțimea vidă este submulțime …………………………… și notăm …………………………… .

b) Orice mulțime este inclusă în ea însăși, adică …………………………… .

c) Mulțimea vidă și mulțimea însăși sunt …………………………… , restul submulțimilor sunt submulțimi …………………………… .

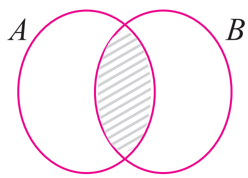
10. a) **Reuniunea a două mulțimi A și B** este …………………………………………… și scriem $A \cup B =$ …………………………… .



$A \cup B$

b) Dacă $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cup B =$ …………………… .

11. a) **Intersecția a două mulțimi A și B** este …………………………………………… și scriem $A \cap B =$ …………………………… .

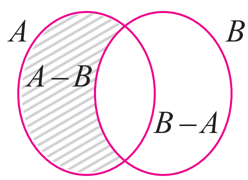


$A \cap B$

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cap B =$ …………………… .

c) Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci A și B se numesc …………………………………………… .

12. a) **Diferența mulțimilor A și B** este …………………………… și scriem $A - B =$ …………………………… .



$A - B \neq B - A$

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A - B =$ …………………… și $B - A =$ …………………… .

13. a) Într-o mulțime fiecare element apare …………………………………… .

b) Analizând diagramele de mai jos, avem reprezentată o mulțime în figura ....

fig. 1 *fig. 2* *fig. 3* *fig. 4*

14. a) Submulțimile mulțimii $M = \{a, b, c\}$ sunt ....

....

b) Numărul de submulțimi ale unei mulțimi A este ....

15. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x^2 \mid x \in A\}$. Scrieți elementele mulțimilor:

$B =$ .... ; $A \cup B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $A \cap B =$ ....

16. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Într-o mulțime nu contează ordinea .... , mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{b, a, c\}$ sunt .... pentru că sunt formate din ....

b) Mulțimea literelor din care este format cuvântul „element” este $C =$ ....

c) Mulțimea cifrelor este o mulțime .... în timp ce mulțimea numerelor naturale este o mulțime ....

17. Se dă mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^*, x \leq 3\}$.

a) Scrieți mulțimea M prin enumerarea elementelor, $M =$ ....

b) Submulțimile improprii ale mulțimii M sunt ....

c) Submulțimile proprii ale mulțimii M sunt ....

18. Determinați a, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $\{1, a, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$; b) $\{1, a, 3\} \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$.

....

19. a) Determinați perechile (x, y) știind că $\{2, x, 4\} \subseteq \{1, 2, y, 3\}$.

b) Determinați perechile (x, y) știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $\{2, 3, 4\} \subset \{3, x, y, 4\}$; ii) $\{3, x, y, 4\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluție: ....

....

20. a) Elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ este restul împărțirii oricărui număr natural la $5\}$ sunt: ....

....

b) Între elementul a și mulțimea $M = \{a, b, c\}$ există relația de .... și notăm ....

c) Între mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3\}$ există relația de .... ; notăm .... și spunem că ....

21. Se consideră mulțimea $M = \left\{\overline{xy} \in \mathbb{N} \mid \overline{xy} \,\vdots\, 23\right\}$.

a) Elementele mulțimii M sunt ....

b) Submulțimile lui M formate din câte două elemente sunt ....

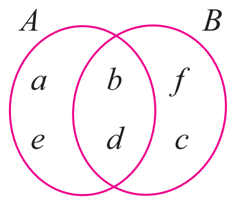
c) Submulțimile lui M formate din câte trei elemente sunt ....

22. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ .... $x \in B\}$;   c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ .... $x \notin B\}$;

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A$ .... $x \in B\}$;   d) $B \setminus A = \{x \mid x \in B$ .... $x \notin A\}$.

23. Analizați, cu atenție, diagrama și specificați dacă propozițiile ce urmează sunt adevărate sau false:



$a \in A \cap B$ .... ; $b \notin A \cap B$ .... ; $\{b, d\} = A \cap B$ .... ;

$d \notin A \cap B$ .... ; $e \in A \setminus B$ .... ; $\{a, c\} \subset A \cup B$ ....

24. Se consideră două mulțimi oarecare A și B.

a) Dacă $A \cap B = A \cup B$, atunci ....

b) Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci ....

25. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

a) Cel mai mare divizor propriu al mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este ....

b) Cardinalul mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este ....

c) Cel mai mic element al mulțimii $\mathcal{M}_6 \cap \mathcal{M}_8$ este ....

d) Din mulțimea $\mathcal{M}_8$, elementele de forma $\overline{ab}$ sunt ....

26. Dacă $A = \{0, 1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 2, 5, 6\}$, atunci:

$A \cup B =$ .... ; $A \cap B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $B \setminus A =$ ....

27. Determinați mulțimile M și N, știind că $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap N = \{2, 3, 4\}$ și $N \setminus M = \{5\}$.

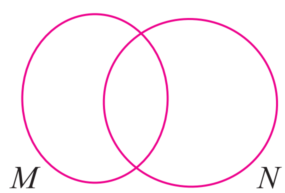
Soluție: ....

....

....

....

....



28. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3\}$. Scrieți două mulțimi A și B care să îndeplinească condițiile:

a) $A \cup B = M \Rightarrow A =$ .... ; $B =$ ....

b) $A \cap B = M \Rightarrow A =$ .... ; $B =$ ....

c) $A \setminus B = M \Rightarrow A =$ .... ; $B =$ ....

29. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 \leq 25\}$ și $B = \{z \in \mathbb{N} \mid z^3 \leq 27\}$. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

$A =$ .... ; $B =$ .... ;

$A \cap B =$ .... ; $A \cup B =$ .... ;

$A \setminus B =$ .... ; $B \setminus A =$ ....

30. Se consideră mulțimile $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a = n^2 + n, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

a) Pentru $n \leq 5$, scrieți mulțimile A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

....

....

....

b) Arătați că cele două mulțimi sunt disjuncte.

31. a) Fie A mulțimea **divizorilor improprii** ai numărului 12. $A =$ ....

b) Fie B mulțimea **divizorilor proprii** ai numărului 12. $B =$ ....

c) Verificați dacă A și B sunt mulțimi disjuncte, $A \cap B =$ .... , adică mulțimile A și B sunt ....

I.2 Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și celui mai mic multiplu comun. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale

1. a) Un număr natural n se numește **prim** dacă ....

b) Scrieți numerele prime mai mici decât 50 ....

c) Un număr natural n se numește **compus** dacă ....

....

Orice număr natural nenul, diferit de 1, care nu este prim poate fi scris ca un produs de numere naturale prime.

2. a) **Descompunerea în factori primi** a unui număr natural înseamnă ....

....

CAPITOLUL II
RAPOARTE ȘI PROPORȚII

II.1 Rapoarte

Fie $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$. Raportul numerelor a și b este numărul $\frac{a}{b}$. Numerele a și b se numesc *termenii raportului*, iar *valoarea raportului* este rezultatul împărțirii lui a la b.

Exemple:

1) *Raportul* numerelor 7 și 21 este $\frac{7}{21}$ și are valoarea 0,(3).

2) *Raportul* numerelor $\frac{2}{3}$ și $\frac{4}{9}$ este $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$ și are valoarea $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{3}{2}=1{,}5$.

1. Scrieți raportul și calculați-i apoi valoarea pentru numerele:

a) 3 și 18 .... ;

b) $\frac{5}{9}$ și $\frac{10}{18}$ .... ;

c) 0,15 și 5 ....

2. Lungimea unui dreptunghi este de 6 cm, iar lățimea, de 2 cm. Completați:

a) raportul dintre lungimea și lățimea dreptunghiului este .... ; acest raport arată că lungimea este .... ori mai mare decât lățimea. Altfel spus, lățimea dreptunghiului este de .... ori mai mică decât lungimea;

b) raportul dintre lățimea și lungimea dreptunghiului este .... Acest raport arată că lățimea este .... din lungime.

3. Calculați valoarea raportului numerelor în fiecare dintre cazurile:

a) 12 și 3 $\Rightarrow \frac{12}{3}=$ .... ;

b) $2\frac{1}{3}$ și $3\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ .... ;

c) 12 și $\frac{1}{3}\Rightarrow$ .... ;

d) $\frac{2}{7}$ și 2 $\Rightarrow$ ....

4. Calculați valoarea raportului dintre:

a) 24 dm și 6 dam $\Rightarrow \frac{24\,\text{dm}}{6\,\text{dam}}=\frac{24\,\text{dm}}{600\,\text{dm}}=\frac{1}{25}=0{,}04$;

b) 11 dm și 1,1 hm $\Rightarrow$ .... ;

c) $2\frac{1}{2}$ m² și 1,02 ha $\Rightarrow$ ....

5. a) Știind că $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ și $\frac{c}{b}=\frac{1}{3}$, calculați $\frac{a}{c}$.

Rezolvare: $\frac{c}{b}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{3}{1}$ și $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{3}{2}$.

b) Știind că $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ și $\frac{c}{b}=\frac{3}{5}$, calculați $\frac{a}{c}$.

....

6. Numărul a este de 2 ori mai mare decât numărul b și $\frac{1}{2}$ din numărul c. Aflați:

a) raportul dintre a și b;

b) raportul dintre b și c;

c) raportul dintre a și c;

d) a câta parte din a este b.

Rezolvare: a) $a = 2b \Rightarrow \frac{a}{b}=$ .... ;

b) $a = 2b$ și $a = \frac{1}{2}c \Rightarrow a = 2b$ și $2a = c \Rightarrow 2a = 4b = c \Rightarrow 4b = c \Rightarrow \frac{b}{c}=$ .... ;

c) $a = \frac{1}{2}c \Rightarrow \frac{a}{c}=$ .... ;

d) $a = 2b \Rightarrow \frac{a}{2} = b \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a = b \Rightarrow$ ....

7. Dacă $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$, calculați $\frac{4a-b}{3a+b}$.

Rezolvare: $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=m\Rightarrow\frac{a}{2}=m\Rightarrow a=2m$ și $\frac{b}{3}=m\Rightarrow b=3m\Rightarrow\frac{4a-b}{3a+b}=\frac{4\cdot2m-3m}{3\cdot2m+3m}=$ ....

....

8. Dacă $\frac{a}{3b}=0,1(6)$, calculați $\frac{2a+b}{3a-b}$.

Rezolvare: $\frac{a}{3b}=0,1(6)\Rightarrow\frac{a}{3b}=\frac{16-1}{90}\Rightarrow\frac{a}{b}=$ ....

....

....

....

II.2 Titlul unui aliaj

Raportul dintre masa materialului prețios și masa aliajului se numește *titlul aliajului* și se notează: $T = \frac{m}{M}$.

Exemplu: Un aliaj conține 324 g aur și 1676 g cupru. Care este titlul aliajului?

Rezolvare: Masa metalului prețios este $m = 324$ g și masa aliajului este $M = 324 + 1676 = 2000$ g.

Titlul aliajului este $T = \frac{m}{M} = \frac{324}{2000} = \frac{162}{1000} = 0{,}162$.

1. Ce cantitate de argint se află în 720 g de aliaj cu titlul de 0,125?

Cum $T = \frac{m}{M}$ și $M =$ .... ; $T =$ .... $\Rightarrow m =$ ....

2. Dacă se topesc la un loc 120 g de aur cu 380 g de cupru, ce titlu va avea aliajul?

$m =$ .... , $M =$ .... , $T =$ ....

3. Se topesc la un loc 800 g de aliaj cu titlul de 0,250 cu 200 g de aur. Care este titlul noului aliaj?

$M_1 =$ .... , $T_1 =$ .... , $m_1 =$ .... Cum $m_2 =$ .... $\Rightarrow m_1 + m_2 =$ .... , $M_2 =$ ....

și $T = \frac{m_1 + m_2}{M_2} =$ ....

4. Se consideră două aliaje din aur și cupru. Unul cu titlul de 0,800 și altul cu titlul de 0,900. Calculați titlul noului aliaj, știind că se iau 10 g din primul aliaj și 40 g din al doilea aliaj.

$T_1 = 0{,}800$, $T_2 = 0{,}900 \Rightarrow$ ....

.... $T = 0{,}880$.

5. Un aliaj de platină are titlul de 0,600 și conține 1200 g de platină pură. Calculați masa aliajului.

$T = \frac{m}{M} \Rightarrow$ ....

$M =$ ....

II.3 Concentrația unei soluții

Numim *concentrația* unei soluții raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției.

Exemplu: Într-o eprubetă se află o soluție de sare în apă. Masa soluției este de 200 g, iar cea a sării, de 24 g. Care este concentrația soluției?

Rezolvare: Concentrația $= \frac{\text{masa substanței}}{\text{masa soluției}} = \frac{24}{200} = 0{,}12$.

1. Concentrația de sare a unei soluții este de 15%. Ce cantitate de sare se găsește în 2540 kg de soluție?

$$C=\frac{15}{100}\Rightarrow\frac{15}{100}=\frac{s}{2540}\Rightarrow s=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

2. Într-un vas se află 20 ℓ de soluție de apă cu sare având concentrația de 10%. Prin fierbere, după două ore se evaporă 5 ℓ de apă. Calculați concentrația soluției rămase în vas.

$C=\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \dfrac{10}{100}=\dfrac{s}{20}\Rightarrow s=\ldots\ldots\ldots\ldots$ g. Concentrația soluției obținute după evaporare este $C_1=\dfrac{s}{\ldots}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$

3. O soluție de sare (dizolvată) în apă cântărește 100 g. Concentrația soluției este de 0,7. Câtă apă trebuie adăugată pentru a obține o soluție cu concentrația de 0,5?

$C=\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow 0{,}7=\dfrac{s}{100}\Rightarrow s=\ldots\ldots\ldots\ldots$ (1). Cum $C_1=0{,}5\overset{(1)}{\Rightarrow}0{,}5=\dfrac{s}{100+\ldots}=\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$

4. În două eprubete se află soluții (apă + sare). Concentrația soluției din prima eprubetă este 0,5, iar cea a soluției din a doua eprubetă este 0,7. Se amestecă 7 ℓ de soluție din prima eprubetă cu 5 ℓ de soluție din a doua eprubetă. Calculați concentrația noii soluții.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$

II.4 Scara unui desen

Dacă *A* și *B* sunt două localități reprezentate într-un desen, atunci *raportul* dintre distanța măsurată pe desen între cele două localități și distanța măsurată în teren, exprimate în aceeași unitate de măsură, este *scara desenului* și se notează

$$S=\frac{\text{distanța din desen}}{\text{distanța din teren}}\ .$$

1. Distanța București–Arad este de 560 km. Distanța pe hartă este de 5,6 cm.

a) Determinați scara hărții.

$$S=\frac{\text{distanța din desen}}{\text{distanța din teren}}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

b) Știind că distanța București–Iași este de 410 km, calculați cât măsoară pe hartă această distanță.

....

....

c) Știind că pe hartă distanța București–Craiova este de 2,1 cm, calculați distanța reală.

....

....

2. Completați tabelul:

Scara	Corespondența între distanțe
1 : 500 000	la 1 cm pe desen corespund .... km în realitate
1 : 200 000	la 1 cm pe desen corespund .... km în realitate
1 : 10 000	la 1 cm pe desen corespund .... km în realitate

3. Un teren dreptunghiular are lungimea de 60 m și lățimea de 16 m.

a) Desenați terenul la scara de 1 : 2000.

b) Calculați perimetrul și aria terenului.

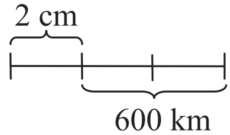
Rezolvare: a) $S = \dfrac{1}{2000} = \dfrac{L}{6000} \Rightarrow L = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} =$ .... ;

$S = \dfrac{1}{2000} = \dfrac{\ell}{\dots\dots} \Rightarrow \ell = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} =$ ....

b) $\mathscr{P} = 2 \cdot (L + \ell) =$ .... = ... (cm);

$\mathscr{A} = L \cdot \ell =$ .... = ... (cm^2).

4. Pe un desen figurează gradația alăturată. Calculați scara desenului.



Rezolvare: $S = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

5. Un desen realizat la scară reprezintă două obiecte. Primul obiect are lungimea reală de 10 m, iar pe desen de 0,5 cm, în vreme ce obiectul al doilea are pe desen lungimea de 1,2 cm.

a) Calculați scara desenului.

b) Calculați care este lungimea reală a obiectului al doilea.

Rezolvare: a) $S = \dfrac{\text{distanța din desen}}{\text{distanța din teren}} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

b) ....

....

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

TESTE RECAPITULATIVE