# Ora de matematică

## CLASA a VIII-a

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele şcolare în vigoare.

Referent ştiinţific: Ana Cârstoveanu

Editor: Ovidiu Bărbulescu

Ilustrația copertei: Ioana Pioaru

Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Comenzi: Marius Dorbin (0722.319.653)

**http://www.librarianominatrix.ro**

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**
**Ora de matematică : clasa a VIII-a** / Nachilă Petre. -
Bascov : Nominatrix, 2020

ISBN 978-606-8873-26-8

51(076)

Petre Năchilă

# Ora de matematică

# Clasa a VIII-a

Editura NOMINATRIX

# ALGEBRĂ

## CAPITOLUL 1

## Intervale de numere reale. Inecuații în $\mathbb{R}$

### 1.1. Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor

**A.** Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$; $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$.

Avem:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

**Observații:**

**1)** $\mathbb{N}$ este stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor naturale (suma și produsul a două numere naturale este număr natural).

**2)** Mulțimea $\mathbb{N}$ nu este stabilă în raport cu scăderea și împărțirea.

*Exemplu:* 3 și 5 $\in \mathbb{N}$, dar $3 - 5 \notin \mathbb{N}$, $3 : 5 \notin \mathbb{N}$.

**3)** $\mathbb{Z}$ este stabilă în raport cu adunarea, scăderea și înmulțirea.

**4)** $\mathbb{Z}$ nu este stabilă în raport cu împărțirea.

**5)** $\mathbb{Q}$ este stabilă în raport cu adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea.

**6)** Pentru orice număr rațional $r$ există o fracție ireductibilă $\frac{a}{b}$ (unică) cu $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $r = \frac{a}{b}$.

**7)** Orice număr rațional poate fi reprezentat prin fracții ordinare echivalente sau printr-o fracție zecimală finită sau printr-o fracție zecimală periodică (simplă sau mixtă).

**8)** Vom lucra cu perioada diferită de 0 și de 9. Astfel, avem:

$$8,(0) = 8;\ 3,46(0) = 3,46;\ -5,(9) = -5\frac{9}{9} = -6.$$

**9)** Transformările fracțiilor ordinare în fracții zecimale au loc prin algoritmul de împărțire: $\frac{8}{25} = 8 : 25 = 0{,}32$; $-\frac{2}{3} = -0{,}(6)$; $\frac{47}{30} = 1{,}5(6)$.

**10)** Transformările fracțiilor periodice în fracții ordinare:

I. fracție zecimală neperiodică: $\overline{a_0, a_1a_2...a_n} = a_0 \frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{1\underbrace{00...00}_{n \text{ cifre de } 0}}$;

II. fracție zecimală periodică simplă: $\overline{a_0,(a_1a_2...a_n)} = a_0 \frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{n \text{ cifre}}}$;

III. fracție zecimală periodică mixtă:

$$\overline{a_0, a_1a_2...a_m(a_{m+1}...a_{m+p})} = a_0 \frac{\overline{a_1a_2...a_{m+p}} - \overline{a_1a_2...a_m}}{\underbrace{99...9}_{p \text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{m \text{ cifre}}}.$$

**11)** Orice număr irațional este reprezentat printr-o fracție zecimală infinită şi neperiodică.

*Exemple:* 2,31311311131111…; $\sqrt{p}$, $p$ număr prim.

**12)** Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ este reuniunea dintre $\mathbb{Q}$ şi mulțimea numerelor iraționale.

**Teoremă.** Fie numărul rațional $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. Numărul se transformă în:

I. fracție zecimală finită dacă $b = 2^m \cdot 5^n$, $m, n \in \mathbb{N}$;

II. fracție zecimală periodică simplă dacă $b$ conține în descompunerea sa numai factori primi diferiți de 2 şi 5;

III. fracție zecimală periodică mixtă dacă $b$ conține în descompunerea sa cel puțin unul din factorii 2 sau 5, dar şi cel puțin un factor prim diferiți de 2 şi 5, partea neperiodică având un număr de cifre egal cu cel mai mare dintre exponenții lui 2 şi 5.

**B. Definiție.** Spunem că numărul real $a$ este mai mare decât numărul real $b$ dacă există numărul real $c > 0$, astfel încât $a = b + c$. Scriem $a > b$. Scriem echivalent $b < a$. Avem $a \ge b \Leftrightarrow$ există $c \ge 0$, astfel încât $a = b + c$.

**Proprietățile relației de ordine:**

a) *reflexivitatea:* $a \ge a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

b) *antisimetria:* $a \ge b$, $b \ge a \Rightarrow a = b$;

c) *tranzitivitatea:* $a \ge b$, $b \ge c \Rightarrow a \ge c$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Relația de ordine este compatibilă cu operațiile de adunare şi înmulțire, adică:

a) $a \ge b$, $c \ge d \Rightarrow a + c \ge b + d$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$;

b) $a \ge b$, $c > 0 \Rightarrow ac \ge bc$; $a \ge b$, $c < 0 \Rightarrow ac \le bc$;

c) $a \ge b \ge 0$, $c \ge d \ge 0 \Rightarrow ac \ge bd$.

Relația „≤” este relația de ordine compatibilă cu adunarea şi înmulțirea numerelor reale.

Relațiile „>” şi „<” nu sunt relații de ordine (sunt doar tranzitive).

**Definiții.** Partea întreagă a unui număr real $x$ (notată cu $[x]$) este cel mai mare număr întreg cel mult egal cu $x$: $[x] = n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n \le x < n + 1$.

*Exemple:* $[2, 43] = 2$; $[-2, 43] = -3$.

Partea fracționară a numărului real $x$ este $\{x\} = x - [x]$.

**Proprietățile ale părții întregi** a unui număr real:

a) $[x] \le x < [x] + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $x - 1 < [x] \le x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

c) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

d) $[x + m] = [x] + m$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$;

e) $[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

**Proprietățile ale părții fracționare** a unui număr real:

a) $0 \le \{x\} < 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $\{x\} = x \Leftrightarrow x \in (0, 1)$;

c) $\{x\} = 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{Z}$;

d) $\{x + m\} = \{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$.

**Definiții. 1.** Fie numărul real pozitiv $a = a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ . Aproximările sale cu $n$ zecimale sunt numere raționale, astfel:

• prin lipsă: $a'_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n$;

• prin adaos: $a''_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$.

Avem $a'_n \le a < a''_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

**2.** Fie numărul real negativ $a = a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ . Aproximările sale cu $n$ zecimale sunt numere raționale, astfel:

• prin lipsă: $a'_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n - 10^{-n}$;

• prin adaos: $a''_n = a_0,a_1a_2\ldots a_n$.

Avem $a'_n < a \le a''_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

**C. Definiție.** Modulul numărului real $a$ (sau valoarea absolută a lui $a$) este:

$$|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \\ a, & a > 0 \end{cases}.$$

Avem $|a| = \begin{cases} -a, & a \le 0 \\ a, & a > 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \ge 0 \end{cases}$.

**Proprietățile modulului** numerelor reale:

a) $|a| \geq 0$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;

b) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

c) $|-a| = |a|$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;

d) $|ab| = |a| \cdot |b|$, $a, b \in \mathbb{R}$;

e) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $\forall\ b \in \mathbb{R}^*$;

f) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (cu „=” dacă $a, b \leq 0$ sau $a, b \geq 0$);

g) $|x| \leq a$, cu $a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

h) $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;

i) $|x| \geq a$, cu $a > 0 \Leftrightarrow x \geq a$ sau $x \leq -a$.

## D. Operații cu numere reale

**I. Proprietățile adunării numerelor reale:**

a) *asociativitatea:* $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$;

b) *comutativitatea:* $a + b = b + a$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$;

c) *elementul neutru (nul):* $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;

d) *elementul opus:* pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $(-a) \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

**II. Proprietățile înmulțirii numerelor reale:**

a) *asociativitatea:* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$;

b) *comutativitatea:* $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$;

c) *elementul unitate:* există elementul $1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;

d) *elementul invers:* pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, există $\dfrac{1}{a}$ (sau $a^{-1}$) $\in \mathbb{R}$ astfel încât:

$a \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a} \cdot a = 1$.

Definim **diferența** dintre $a$ şi $b \in \mathbb{R}$ astfel: $a - b = a + (-b)$.

Definim **împărțirea** lui $a \in \mathbb{R}$ la $b \in \mathbb{R}^*$ astfel: $a : b = a \cdot \dfrac{1}{b}$.

Avem următoarele **proprietăți**:

a) *distributivitatea înmulțirii față de adunare şi scădere:* $a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac$;

b) *regula semnelor:* $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$; $(-a) \cdot (-b) = ab$.

**III. Puterile cu exponent întreg** sunt definite astfel: dacă $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ factori}}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$, $0^n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a^1 = a$, $a \in \mathbb{R}$.

**Proprietățile ridicării la putere:**

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci avem:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; b) $a^m : a^n = a^{m-n}$; c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
d) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$; e) $a^m : b^m = (a : b)^m$.

**IV. Definiție.** Radicalul (de ordinul 2) (sau rădăcina pătrată) a numărului real $a \geq 0$ este numărul $x > 0$ cu proprietatea $x^2 = a$. Notăm $x = \sqrt{a}$.

**Proprietățile rădăcinii pătrate:**

a) $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$; b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $a > 0$, $b \geq 0$;

c) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$; d) $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$, $a > 0$, $n \in \mathbb{Z}$;

e) $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ pentru $a \geq 0$, $b > 0$;

f) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$, pentru $a^2 \geq b \geq 0$, $a \geq 0$ (formula radicalilor dubli (compuşi).

**E. Valoarea maximă şi valoarea minimă** a numerelor $a$ şi $b$:

$$\max(a,b) = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a \leq b \end{cases} = \frac{a + b + |a - b|}{2}; \qquad \min(a,b) = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & b \leq a \end{cases} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

**Media aritmetică** a numerelor reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

**Media aritmetică ponderată** a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ este $m_p = \dfrac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$.

**Mediile armonică, geometrică (proporțională), pătratică** ale numerelor $a > 0$, $b > 0$ sunt: $m_{arm} = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a + b}$; $m_g = \sqrt{ab}$; $m_p = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

**Teoremă (inegalitatea mediilor)**. Pentru orice $a > 0$, $b > 0$, $a \leq b$, avem:

$$a \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq b;$$

$\min(a,b) \leq m_{arm} \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq b$ (cu „=” pentru $a = b$).

## Probleme propuse

**A.**

$*$

**1.** Dați câte trei exemple de fracții echivalente cu:

a) $\frac{2}{3}$;  b) $\frac{-3}{5}$.

**2.** Determinați numerele întregi $n$ pentru care:

a) $\frac{13}{2n-1} \in \mathbb{Z}$;  b) $\frac{-11}{3n-1} \in \mathbb{Z}$;  c) $\frac{6}{3n-2} \in \mathbb{Q}-\mathbb{Z}$;  d) $\frac{11}{3n-1} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

**3.** Scrieți numărul 8 ca:

a) suma a trei numere întregi;  b) produsul a trei numere naturale;

c) produsul a patru numere din $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$;  d) produsul a două numere din $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

**4.** Demonstrați că există două cifre $a$ pentru care:

a) $\sqrt{5n+a} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$;  b) $\sqrt{5n+\overline{1a}} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**5.** Transformați în fracții zecimale numerele raționale:

a) $\frac{4}{125}$;  b) $\frac{6}{72}$;  c) $\frac{-25}{8}$;  d) $\frac{16}{35}$;  e) $\frac{21}{20}$;  f) $1\frac{17}{60}$.

**6.** Transformați în fracții ordinare numerele:

a) –2,(3);  b) 3,(20);  c) 2,(213);  d) 2,21(3);  e) –3,32(10).

**7.** Ordonați crescător numerele:

a) 1,(23); 1,23; 1,2(3); 1,23(4); 1,23(2);

b) –2,1(4); –2,15; –2,145; –2,14(3); –2,14(5).

**8.** Demonstrați că următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{3}$;  b) $2\sqrt{5}$;  c) $\sqrt{3}+2$;  d) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$;  e) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$;  f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$.

$**$

**9.** Demonstrați că o fracție zecimală este finită dacă și numai dacă este de forma $\frac{a}{2^m \cdot 5^n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

**10.** Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5n+8}$;  b) $\sqrt{10n+7}$;  c) $\sqrt{4n+2}$;  d) $\sqrt{4n+3}$;  e) $\sqrt{n^2+n}$.

**11.** Demonstrați că $A \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, unde $A = 0{,}122333444\ldots\underbrace{nn\ldots n}_{\text{de } n \text{ ori}}\ldots$.

**12.** Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $n$ și $p$ numere prime. Demonstrați că:

a) $a\sqrt{p}+b=0 \Leftrightarrow a=b=0$;

b) $a\sqrt{p}+b=c\sqrt{p}+d \Leftrightarrow a=c, b=d$;

c) $a\sqrt{n}+b\sqrt{p}=0 \Leftrightarrow a=b=0$.

**13.** Demonstrați că:

a) $x \in \mathbb{N},\ \sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{N}$;

b) $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N},\ \sqrt{x}+\sqrt{y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{N},\ \sqrt{y} \in \mathbb{N}$.

**14.** Determinați mulțimea $A=\left\{n \in \mathbb{N} \left| \frac{119^{n+1}\cdot 85^{n+2}}{49^{n}\cdot 289^{n+1}} \in \mathbb{N}\right.\right\}$.

**15.** a) Determinați $n \in \mathbb{N}$, dacă fracțiile $\frac{n+4}{n+7}$ și $\frac{n+6}{n+10}$ nu sunt echivalente.

b) Există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^3 + y^3 = 3x + 5y + 2021$?

**16.** Fie fracția ireductibilă $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$. Demonstrați că fracția $\frac{q-p}{p}$ este ireductibilă.

**17.** Determinați numerele prime $p$ pentru care $p + 2$, $p + 4$, $p^2 + 2$ și $p^2 + 4$ sunt numere prime.

**18.** Fie $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_2^2 = a_1a_3,\ a_3^2 = a_2a_4,\ a_4^2 = a_3a_5,\ a_5^2 = a_4a_1$. Demonstrați că $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$.

***

**19.** Fie $a, b \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $a^3 + b^3 = 2ab$. Demonstrați că $1 - ab$ este pătratul unui număr rațional.

**20.** Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem $A_n \in \mathbb{Q}$, unde:

$$A_n=\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}+\frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{n+\sqrt{2n+1}}{n+1-\sqrt{2n+1}}+\frac{n-\sqrt{2n+1}}{n+1+\sqrt{2n+1}}.$$

**21.** Determinați numerele prime $a, b, c, d$ astfel încât $2a + 3b + 4c + 24d = 282$.

**22.** Fie $x, y \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că $23 \mid 2x + 3y \Leftrightarrow 23 \mid 9x + 2y$.

**23.** Determinați $A=\left\{n \in \mathbb{Z} \left| \frac{n^2+2}{n+2} \in \mathbb{Z}\right.\right\}$.

**24.** Demonstrați că fracția $F_1$ este ireductibilă, iar $F_2$ este reductibilă, unde:

$$F_1=\frac{2n^2+3n+1}{5n^2+6n+2},\quad F_2=\frac{5n^2+5n+4}{3n^4+3n^2+6},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

**25.** a) Demonstrați că fracția $F=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2000+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2001+1}$ este ireductibilă.

b) Generalizare.

## B.

*

**26.** Scrieți aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos mai mici decât $10^0$, $10^{-1}$, $10^{-2}$, $10^{-3}$ pentru numerele $a = 2,(7)$, $b = -3,(6)$, $c = \sqrt{2}$, $d = -\sqrt{2}$, $e = \sqrt{5}$, $f = -\sqrt{5}$.

**27.** Comparați numerele:

a) $\sqrt{n+5}$ și $\sqrt{2n+1}$; b) $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$; c) $1+\sqrt{n+3}$ și $2+\sqrt{n+1}$.

**28.** Comparați numerele:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ și $\sqrt{3}+\sqrt{4}$; b) $\sqrt{13}-\sqrt{7}$ și $\sqrt{11}-\sqrt{5}$.

**29.** Demonstrați că:

a) $\frac{1}{2}<\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{19}<1$; b) $\frac{1}{10}<\frac{1}{90}+\frac{1}{91}+...+\frac{1}{99}<\frac{1}{9}$;

c) $\frac{2}{5}<\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{10}{7\cdot 17}+\frac{15}{17\cdot 32}+\frac{18}{32\cdot 50}<\frac{3}{5}$.

**30.** Demonstrați că numărul $\sqrt{n^2+n+1} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

**

**31.** Demonstrați că numărul $\sqrt{n^2+3n+3} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**32.** Determinați $a, b, c \in \mathbb{Z}$, știind că: I. $abc < 0$; II. $|a| = b + 2 \geq 3b$; III. $a + b + c = 2$.

**33.** Ordonați numerele $a, b, c$, știind că $a^2 + b^2 + c^2 + 34{,}5 = 5a + 11b - c$.

**34.** Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a + b + c = 1$. Determinați $\min(a^2 + b^2 + c^2)$.

**35.** Fie $a, b, c$ cifre nenule distincte și $x=\frac{a}{10}+\frac{b}{100}$, $y=\frac{b}{10}+\frac{c}{100}$, $z=\frac{c}{10}+\frac{a}{100}$ și $A =$ $= x + y + z$. Determinați:

a) min $A$ și max $A$;

b) cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $nA \in \mathbb{N}^*$ și $a + b + c = 12$.

***

**36.** Demonstrați că dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 - 2x + 14y + 46 = 0$, atunci $x > y$.

**37.** Fie $a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Demonstrați că $a^n + b^n > 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

**38.** Demonstrați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $[x] = [y]$, atunci $|x - y| < 1$.

**39.** Demonstrați că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

**40.** Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem:

a) $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$; b) $[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$ (identitatea lui Hermite).

**41.** Calculați partea întreagă a numerelor:

a) $\sqrt{n^2+2n}$; b) $\sqrt{n^2+4n}$; c) $\sqrt{4n^2+n}$; d) $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2$.

**42.** Rezolvați următoarele ecuații:

a) $\left[\frac{x-3}{3}\right]=\frac{x+1}{4}$; b) $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=\frac{2x-1}{2}$; c) $\left[\frac{3x-1}{2}\right]=\frac{3x+1}{2}$;