Nicolae Grigore

MATEMATICĂ
OLIMPIADE ȘI
CONCURSURI ȘCOLARE

Clasa a VII-a

**Probleme selectate pe unități de învățare
cu rezolvări complete**

Editura NOMINA

Editor: Alexandru Creangă
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Imagine copertă: Shapes © Fotoluminate | Dreamstime.com (clasa a VII-a)

Pentru comenzi prin poştă: 0757.020.442
0348.439.417

Telefon	**Zona**
0741.488.918	Oltenia (Dolj, Gorj şi Mehedinţi), Banat şi Transilvania (Alba şi Hunedoara);
0748.111.247	Crişana şi Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureş, Harghita şi Covasna);
0751.207.922	Oltenia (Vâlcea şi Olt), Transilvania (Braşov şi Sibiu) şi Muntenia (Argeş, Teleorman şi Giurgiu);
0757.020.443	Transilvania (jud. Bistriţa-Năsăud) şi zona Maramureş;
0746.200.413, 0769.221.685	Buzău, Bacău, Neamţ, Suceava; Vrancea, Vaslui, Iaşi, Botoşani;
0744.429.512	Muntenia (Dâmboviţa, Prahova, Brăila, Ialomiţa şi Călăraşi), Dobrogea şi jud. Galaţi;
0755.107.291, 0769.221.680, 0757.020.440	Bucureşti

Punct de lucru: Loc. Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeş
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro
www.librarianomina.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
GRIGORE, NICOLAE
Matematică - olimpiade şi concursuri şcolare : clasa a VII-a : probleme selectate pe unităţi de învăţare cu rezolvări complete / Nicolae Grigore. - Piteşti : Nomina, 2023
ISBN 978-606-535-954-3

51

ALGEBRĂ

MULȚIMEA NUMERELOR REALE
($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$)

I. Mulțimea numerelor întregi ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$)

1. Să se determine mulțimea A = $\left\{\overline{abc} \,\middle|\, \sqrt{\overline{abc5}} + \sqrt{\overline{bc5}} + \sqrt{\overline{c5}} = 105\right\}$.

Etapa locală, Argeș, 2009

2. Arătați că numărul $\overline{A(A+1)}$ nu este pătrat perfect, $(\forall)$ A $\in \mathbb{N}$, A = 4k + 2, k $\in \mathbb{N}$.

Faza pe sector, București, 2009

3. Numerele naturale x, y, z satisfac simultan condițiile:
a) 23 | 3x + 13y + 8z; b) 23 | x + y + z.
Să se arate că: 23 | 4x + 18y + 11z.

Etapa locală, Buzău, 2009

4. Arătați că nu există pătrate perfecte de forma 4k + 2, oricare ar fi numărul k $\in \mathbb{N}$.

Etapa locală, Caraș-Severin, 2009

5. Fie $\overline{abc} = x^2 + x + 1$, număr natural.
a) Numărul $\overline{abc}$ este par sau impar?
b) Enumerați toate numerele $\overline{abc}$.
c) Să se calculeze suma acestor numere.

Etapa locală, Harghita, 2009

6. Calculați suma
$S = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2009^2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2010.$

Etapa locală, Ilfov, 2009

7. Arătați că pentru orice m $\in \mathbb{N}^*$ expresia E = $(m + 3^m)(m + 1)(m - 1)$ se divide cu 3.

8. Să se determine valorile lui n $\in \mathbb{Z}$ astfel încât $(n^2 + 6n - 6)$ se divide cu n + 3.

Etapa locală, Maramureș, 2009

9. a) Arătați că: $89 = 2^2 + 6^2 + 7^2 = 3^2 + 4^2 + 8^2$.
b) Fie n $\in \mathbb{N}^*$. Arătați că orice număr de forma $A = 10^{2n} - 10^{2n-1} - 10^{2n-2}$ se poate scrie sub forma $x^2 + y^2 + z^2$, unde x, y, z $\in \mathbb{N}^*$ și sunt distincte.

Etapa locală, Olt, 2009, prof. Daniel Cojocaru

10. Determinați elementele mulțimii: M = $\left\{n \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{5n-1}{n+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Etapa locală, Sălaj, 2009

42. Aflați numărul întreg n, știind că fracția $\frac{5n-1}{4n+9}$ și inversa sa sunt simultan numere întregi.

Etapa locală, Prahova, 2016

43. Demonstrați că media aritmetică a primelor k numere naturale pare consecutive și cea a primelor k numere naturale impare consecutive sunt numere naturale consecutive, unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Etapa locală, Iași, 2015

44. Se consideră numărul $a_n = 18\underbrace{777...77}_{\text{de n ori}}889$, cu n număr natural, și c_n câtul împărțirii numărului a_n la 13.

a) Să se arate că a_n se divide cu 13 pentru oricare n.

b) Să se determine n pentru care $s(a_n) = 2s(c_n)$, unde s(m) reprezintă suma cifrelor numărului m.

Etapa locală, Gorj, 2016

45. Determinați numerele naturale m și n, știind că m este prim și

$$\left|1-\left|\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right|\right| = (-1)^m \cdot \frac{179}{32}.$$

Etapa locală, Vrancea, 2019

46. Să se determine numerele naturale a și b, a < b, pentru care are loc relația:

$$3 \cdot [a, b] + 5 \cdot (a, b) = 123.$$

(S-a notat [a, b] = c.m.m.m.c. al numerelor naturale a și b, iar (a, b) = c.m.m.d.c. al numerelor naturale a și b.)

Etapa locală, Galați, 2020, prof. Vasile Popa

47. a) Există numere naturale de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea $\overline{ab}^2 - \overline{cd}^2 = 2020$?

b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ cu proprietatea $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = 2020$.

Etapa locală, București, 2020

II. Mulțimea numerelor raționale

1. Fie șirul de numere raționale $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2007}$, astfel încât $a_1 = 1 + 1^{-1}$, $a_2 = 1 + 2^{-1}$, $a_3 = 1 + 3^{-1}$, ..., $a_{2007} = 1 + 2007^{-1}$.

a) Comparați a_{75} cu a_{74}.

b) Arătați că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{2007} \in \mathbb{N}$.

c) Aflați $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 2005$, astfel încât $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \in \mathbb{N}$.

Etapa locală, Brașov, 2008

2. Se dau numerele raționale: $A = \frac{1}{a+b_1} + \frac{2}{a+2b_2} + \frac{3}{a+3b_3} + ... + \frac{n}{a+nb_n}$;

b) Se dau numerele $a = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{5\cdot 8} + \frac{4}{8\cdot 12} + \frac{5}{12\cdot 17} + \frac{6}{17\cdot 23} + \frac{7}{23\cdot 30}$ și b = = 3 + 8 + 13 + … + 10018. Calculați partea întreagă a numărului $\sqrt{15a + \frac{b}{1002}}$.

Etapa locală, Constanța, 2019

141. a) Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{N}$ care nu este multiplu de 3, restul împărțirii lui x^2 la 3 este egal cu 1.

b) Demonstrați că $a = \sqrt{2018^{2020} + 2020^{2018} + 2019}$ este irațional.

Etapa locală, Constanța, 2019

142. Se dau numerele $a = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5} + \frac{3}{5\cdot 8} + ... + \frac{20}{192\cdot 212}$ și b = 1 + 6 + 11 + 16 + + … + 2016. Arătați că numărul $\sqrt{2012\cdot a + \frac{b}{2017} - 1}$ este număr irațional.

Etapa locală, Covasna, 2019

143. Se consideră expresia $E(n) = \sqrt{(10^n - 2019)^2} - \sqrt{(2018 - 10^n)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinați valorile expresiei E(n).

b) Aflați numerele raționale a și b pentru care $E(n) = \frac{a}{\sqrt{2} - 1} + \frac{b}{\sqrt{2} + 1}$, unde $n \geq 4$.

Etapa locală, Sibiu, 2019

144. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, scrise în baza zece, astfel încât a + b = 10 și $\left[\sqrt{\overline{ab}}\right] = 6$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului real x.

b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, scrise în baza zece cu cifre distincte, astfel încât $a \cdot b = c$ și $n = \sqrt{\overline{abc} + \overline{cab} + \overline{bca} - (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) - (a + b + c)}$ să fie număr natural.

Etapa locală, Suceava, 2019

145. Determinați numerele naturale $\overline{xy}$ și $\overline{abcd}$, știind că $\sqrt{2019 - a\sqrt{\overline{bcd}}} = a^2 \cdot \sqrt{\overline{xy}}$.

Etapa locală, Bucureşti, 2019, prof. Traian Preda

146. a) Determinați cifrele a și b, astfel încât $\sqrt{\overline{b7b}} = \overline{ab}$. (Numerele sunt scrise în baza zece.)

b) Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ și xy + yz + zx = 2019, arătați că:

$$\sqrt{(x^2 + 2019)(y^2 + 2019)(z^2 + 2019)} \in \mathbb{Q}.$$

Etapa locală, Dolj, 2019

147. Să se afle perechile de numere naturale (p, q) pentru care $\sqrt{p\cdot q - q} = 2019$.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2019

148. a) Arătați că adăugând 1 la produsul a patru numere întregi consecutive se obține un pătrat perfect.

b) Demonstrați că $\sqrt{2020\cdot 2021\cdot 2022\cdot 2023 + 1} \in \mathbb{N}$.

Etapa locală, Cluj, 2020, prof. Cristian Petru Pop

149. Se consideră expresia $E=\dfrac{\sqrt{19+8\sqrt{3}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}{x+3}$, $x\neq -3$. Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care expresia este un număr întreg.

Etapa locală, Cluj, 2020, prof. Rodica Lădar

150. Fie $x=\left(\sqrt{2019}+\sqrt{2020}\right)\left(a\cdot\sqrt{2019}+b\cdot\sqrt{2020}\right)$, $a, b\in\mathbb{Z}_+$.

a) Dacă x este număr rațional, calculați $a^{2019}+b^{2019}$ și $a^{2020}-b^{2020}$.

b) Dacă $x=-1$, determinați valorile lui a și b.

Etapa locală, Galați, 2020, prof. Veronica Grigore (prelucrare)

151. a) Aflați numerele întregi x, diferite de -1, astfel încât $\sqrt{\dfrac{x-2010}{x+1}}$ să fie număr întreg.

GM nr. 5/2011

b) Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2020}$ numere naturale impare. Arătați că numărul:

$A=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_{2020}^2-1}$ este irațional.

Etapa locală, Argeș, 2020

152. Arătați că $\sqrt{2^{2018}+3^{2020}+4^{2022}}$ nu este număr rațional.

Etapa locală, Bacău, 2020

153. Câte numere de forma $\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$, care nu sunt raționale, există între numerele $a=\sqrt{4\cdot 1\underbrace{00...0}_{9\text{ zerouri}}1^2}$ și $b=\sqrt{2\underbrace{00...0}_{9\text{ zerouri}}3\cdot 2\underbrace{00...0}_{9\text{ zerouri}}3}$.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2020

154. Fie $A=\sqrt{1}+\sqrt{1+3+5}+\sqrt{1+3+5+7+9}+\ldots+\sqrt{1+3+5+\ldots+8077}$. Arătați că numărul $\sqrt{A}$ este număr natural.

Etapa locală, Iași, 2020

155. a) Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului $a=\sqrt{8+2\sqrt{7}}$.

b) Dacă $A=\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{8+2\sqrt{7}}}}}}-1$, arătați că A^2 este număr natural.

Etapa locală, Dolj, 2020, prof. Nicolae Ivășchescu

IV. Calcul algebric

1. Fie $E(x)=\sqrt{x^2+6x+153}$, $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că există cel puțin trei valori întregi pentru x astfel încât $E(x)\in\mathbb{N}$.

b) Arătați că există o infinitate de numere raționale x, astfel încât $E(x)\in\mathbb{Q}$.

Etapa locală, Arad, 2008

2. Calculați $\left[(5+2\sqrt{6})^{2008}+\dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^{2008}}\right]\cdot\dfrac{(10-4\sqrt{6})^{2008}}{2^{2009}}$.

Etapa locală, Dâmbovița, 2008, prof. Elena Boghe

67. Demonstrați că, dacă x, y și z sunt numere reale pozitive, astfel încât $x + y + z = 1344$, atunci $\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \le 2016$.

Etapa locală, Bihor, 2016

68. Arătați că $0{,}9 < \frac{3}{2^2} + \frac{5}{6^2} + \frac{7}{12^2} + ... + \frac{2013}{1013042^2} < 1$.

Etapa locală, Mehedinți, 2016

69. Numerele naturale a și b verifică egalitatea $\frac{2020b}{b^2 - 2019} = \frac{2020a + 26260}{a}$.

a) Arătați că $0 < b - \frac{2019}{b} < 1$.

b) Determinați numerele a și b.

Etapa locală, Sibiu, 2019

70. a) Arătați că $\sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} > n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătați că $\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{25}{2}} + ... + \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{2}} > \frac{n(n+2)}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Etapa locală, Sălaj, 2019, Supliment G.M.

71. Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \ge 2$, iar m și n divizori ai lui a, cu $m < n$. Arătați că $a \cdot (n - m) > m^2$.

Etapa locală, Bihor, 2020

72. Fie numerele întregi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2022}$, astfel încât $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2022}\} = \{1, 2, 3, \dots, 2022\}$. Arătați că printre numerele $|x_1 - 1|, |x_2 - 2|, |x_3 - 3|, \dots, |x_{2022} - 2022|$ există cel puțin două numere egale.

Etapa locală, Bihor, 2020

73. Dacă $a = \frac{1}{63} + \frac{2}{62} + \frac{3}{61} + ... + \frac{63}{1}$ și $b = \frac{1}{64} + \frac{2}{63} + \frac{3}{62} + ... + \frac{64}{1}$, arătați că $b - a > 3$.

Etapa locală, Argeș, 2020

74. Arătați că $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... + \frac{1}{5^{2020}} < \frac{5}{4}$.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2020

75. Se consideră numerele raționale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$, astfel încât $a_1 = 1 + \frac{1}{1}$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $a_3 = 1 + \frac{1}{3}$, ..., $a_{2020} = 1 + \frac{1}{2020}$.

a) Demonstrați că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2022}$ este număr natural.

b) Demonstrați că $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2019} - a_{2022} < \frac{1010}{1011}$.

Etapa locală, Hunedoara, 2020

VI. Ecuații și inecuații

1. Determinați numerele naturale x, y, z pentru care $x \le y \le z$ și $2006^x + 2007^y = 2008^z$.

Etapa locală, Cluj, 2008

2. Determinați numerele raționale x și y astfel încât:

$$\frac{x+2008}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \cdot (y-2008).$$

Etapa locală, Dolj, 2008

3. a) Câte soluții întregi are inecuația $|x| \le 2008$?
b) Câte soluții naturale are ecuația $x + y + z = 2008$?

Etapa locală, Mehedinți, 2008

4. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $xy + x + y = 1$.

Etapa locală, Sălaj, 2008

5. Determinați numerele raționale x, y, z care satisfac simultan relațiile:
$y + z = |x| - 2$; $z + x = |y| + 1$; $x + y = |z| + 3$.

Concursul interjudețean „TMMATE", 2008, prof. Gheorghe Silberberg

6. Aflați $x \in \mathbb{N}$ din egalitatea $\frac{x^2+1}{x+1} + \frac{x^2+2}{x+2} + \frac{x^2+3}{x+3} + \ldots + \frac{x^2+2007}{x+2007} = 2007$.

Concursul interjudețean „Discipolii lui Lazăr", Traian Cotfas

7. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$\left\{\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} - 1\right] : (0,4)^{-1} + \frac{1}{2}\right\} : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 6^{-1}\right] = 0,5 \cdot |x+1| - 3.$$

Etapa locală, Alba, 2009

8. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația: $2xy - 7y = 5x + 3$.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2009

9. Determinați numerele $x, y \in \mathbb{N}$ care verifică relația: $2xy + x + y = 85$.

Etapa locală, Brăila, 2009

10. Aflați $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x^2\sqrt{(y-1)^2} = 2009$.

Etapa locală, București, 2009

11. Arătați că ecuația $x^2 + 6y^2 = 2807$ nu are soluții în $\mathbb{Z}$.

Etapa locală, București, 2009

12. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ știind că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Etapa locală, Buzău, 2009

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $2[x] + 4 = 3x$ ([x] reprezintă partea întreagă a numărului real x).

Etapa locală, Călărași, 2009

14. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $\frac{2}{x} + \frac{5}{3y} = -1$.

Etapa locală, Călărași, 2009

117. În triunghiul isoscel ABC, cu [AB] = [AC], se consideră bisectoarele (AD, respectiv (CE, cu $D \in (BC)$, $E \in (AB)$ și punctul F, mijlocul lui (AC), astfel încât $EF \perp$ $\perp AC$.

a) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

b) Arătați că triunghiul ABP este isoscel, unde $AD \cap EF = \{P\}$.

Etapa locală, Alba, 2016, G.M. 9/2015

118. Fie ABC un triunghi echilateral, M mijlocul laturii [BC] și $D \in (AM)$ astfel încât AM + MD = AB. Să se determine măsura unghiului DBM.

Etapa locală, Gorj, 2016

119. Se consideră un triunghi ABC și punctele M, N, P pe laturile [BC], [AC], respectiv [AB], astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Dacă E este mijlocul lui [NP] și F mijlocul lui [BC], demonstrați că EF este paralelă cu AM și $EF = \frac{1}{2} \cdot AM$.

Etapa locală, Mehedinți, 2016

120. Triunghiul ABC este isoscel (AB = AC) cu $m(\sphericalangle A) = 36°$, BM este bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $M \in (AC)$, și BN bisectoarea $\sphericalangle ABM$, $N \in [AM]$. Demonstrați că:

a) MC = AN;

b) $\left(\frac{AN}{NM}\right)^2 = \frac{AN}{MN} + 1$.

Etapa locală, București, 2019, prof. Traian Preda

121. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC și fie D piciorul înălțimii din A pe BC. Se duce $DE \perp AC$, $E \in AC$, și fie F un punct pe segmentul (DE), astfel încât $AF \perp BE$. Arătați că $\frac{DF}{EF} = \frac{CD}{BD}$.

Etapa locală, Constanța, 2019

122. În triunghiul ABC se aleg punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{AC}$. Dacă punctul P este mijlocul laturii [AB] și punctul Q este mijlocul segmentului [MN], demonstrați că $\frac{AM}{AB} + 2 \cdot \frac{PQ}{BC} = 1$.

Etapa locală, Sibiu, 2019, prof. Cătălin Cristea, G.M. 10/2018

123. În triunghiul ascuțitunghic ABC, $AE \perp BC$, $E \in BC$ și $M \in BC$, astfel încât $C \in$ $\in (BM)$. Bisectoarea unghiului ACM intersectează dreapta AE în punctul D.

a) Arătați că $m(\sphericalangle ADC) \neq m(\sphericalangle ACB)$.

b) Știind că $(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC) = x°$ și că ΔABC este isoscel, aflați x°.

Etapa locală, Vâlcea, 2019

124. Fie triunghiul isoscel ABC, AB = AC, și $m(\sphericalangle BAC) > 60°$. Construim punctul $D \in (BC)$, astfel încât BD = AC. Demonstrați că semidreapta (AD și mediatoarea segmentului [CD] se intersectează pe bisectoarea unghiului exterior ΔABC cu vârful în C.

Etapa locală, Vrancea, 2019

125. Punctul D este în interiorul triunghiului ABC, astfel încât unghiurile BAC și BDC sunt suplementare, (BE este bisectoarea ∢ABD și (CE este bisectoarea ∢ACD. Aflați m(∢BEC).

Etapa locală, Bihor, 2020

126. Punctul O este intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului ABC. Fie punctul D intersecția dreptei AO cu segmentul BC. Știind că $OD = BD = \frac{1}{3} \cdot BC$, să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Etapa locală, Galați, 2020, prof. Veronica Grigore

127. Considerăm un cerc de centru O și triunghiul ABC înscris în cerc, astfel încât $\overset{\frown}{AC} = 120°$, $AD \perp BC$, D situat pe segmentul BC, O situat pe segmentul AD, $DE \perp AC$, $E \in AC$. Dacă M este mijlocul segmentului DE, arătați că $AM \perp BE$.

Etapa locală, Argeș, 2020, G.M. 12/2019 (enunț modificat)

128. În triunghiul ABC ascuțitunghic cu m(∢A) = 60° se consideră $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$) și M mijlocul laturii BC. Arătați că triunghiul DEM este echilateral.

Etapa locală, Bacău, Hunedoara, 2020, G.M. 10/2019

129. Fie $\mathscr{C}(O, r)$ și A un punct exterior cercului astfel încât unghiul format de tangentele la cerc AM și AN ($M, N \in \mathscr{C}(O, r)$), are măsura de 30°. Dacă P este mijlocul segmentului AO, arătați că triunghiul MNP este echilateral.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2020

130. Se consideră un triunghi ABC și punctele M pe latura AB, N pe latura AC. Dacă triunghiul AMN este echilateral și MB = AC, arătați că triunghiul BNC este isoscel.

Etapa locală, Iași, 2020, prof. Dan Nedeianu, G.M. 9/2019

131. Fie AB un diametru al cercului $\mathscr{C}(O, r)$. Prin punctul P, mijlocul lui [OA], construim perpendiculara pe AB care intersectează cercul în C și D. Tangenta în C la cerc intersectează dreapta AB în M. Arătați că A este mijlocul segmentului [OM].

Etapa locală, Bucureşti, 2020, prof. Vasile Scurtu, G.M. 12/2019

II. Patrulatere. Proprietăți

1. Fie ABCD trapez, cu $AB \parallel CD$, m(∢A) < 90°, m(∢B) < 90°, $DN \perp AB$, $N \in (AB)$, DC = DN, $AP \perp AB$ astfel încât P și D să fie de o parte și de alta a dreptei AB și AB = AP, iar $\{M\} = AD \cap BC$. Arătați că M, N, P sunt coliniare.

Etapa locală, Alba, 2008

2. Dreptunghiul ABCD are $AB = 2 \cdot BC = 2a$. Semidreptele (Ax și (Ay intersectează pe CD în punctele E și respectiv F, astfel încât m(∢BAE) = 30° și m(∢DAF) = 30°. Semidreapta (Fz este perpendiculară pe AE în punctul M și intersectează pe AB în N. Arătați că:

a) $E \in (CD)$; b) ΔADM este echilateral; c) ANEF este romb.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2008, prof. Ioan Tripa

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 26 februarie 2022

1. Numărul $N = \dfrac{2}{\frac{2}{5}} + \dfrac{\frac{2}{5}}{2}$ este egal cu:

A 5,8 **B** 0,4 **C** 1 **D** 5,2 **E** 2

2. Produsul soluțiilor ecuației $\dfrac{x^2+3}{3} + \dfrac{x^2+7}{5} + \dfrac{x^2+19}{11} = 6$ este egal cu:

A 5 **B** 3 **C** –3 **D** –5 **E** 11

3. Suma pătratelor soluțiilor ecuației $||x| - 3| = 2$ este egală cu:

A 1 **B** 2 **C** 26 **D** 50 **E** 52

4. Numărul elementelor iraționale ale mulțimii $A = \left\{\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, ..., \sqrt{300}\right\}$ este:

A 284 **B** 282 **C** 18 **D** 17 **E** 283

5. Se consideră numărul $A = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot 3}} + \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 5}} + \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot 7}} + ... + \dfrac{\sqrt{243}-\sqrt{241}}{\sqrt{241\cdot 243}}$. Atunci:

A $0 < A < 1$ **B** $A \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ **C** $A > 2$ **D** $1 < A < 2$ **E** $A \in \mathbb{N}$

6. Se consideră rombul *ABCD*, cu $AB = 2\sqrt{3}$ cm. Fie *M* și *N* mijloacele laturilor *AB* și *CD*. Dacă dreptele *MN* și *AB* sunt perpendiculare, atunci aria rombului *ABCD* este egală cu:

A 3 cm^2 **B** 12 cm^2 **C** $\sqrt{3}$ cm^2 **D** 6 cm^2 **E** $6\sqrt{3}$ cm^2

7+8. Se consideră dreptunghiul *ABCD* și punctele *M*, *N*, astfel încât *M* este mijlocul laturii *CD*, iar *N* este mijlocul segmentului *AM*. Dacă *AB* = 4 cm, iar dreptele *AM* și *BN* sunt perpendiculare, atunci:

A $\sphericalangle DAM = 35°$ **B** $\sphericalangle DAM = 45°$ **C** $\sphericalangle DAM = 30°$ **D** $\sphericalangle DAM = 60°$ **E** $\sphericalangle DAM = 50°$

A $CN = 4\sqrt{3}$ cm **B** $CN = 4$ cm **C** $CN = 2\sqrt{3}$ cm **D** $CN = 6$ cm **E** $CN = 4\sqrt{2}$ cm

9. Se consideră paralelogramul *ABCD* cu *AB* = 4 cm și $\sphericalangle A = 60°$. Dacă bisectoarele unghiurilor *A* și *C* nu sunt paralele, atunci aria lui *ABCD* este egală cu:

A $8\sqrt{3}$ cm^2 **B** 16 cm^2 **C** $16\sqrt{3}$ cm^2 **D** 24 cm^2 **E** $12\sqrt{3}$ cm^2

10. Numerele reale nenule *x*, *y*, *z* verifică relațiile $\dfrac{xy}{z} = \sqrt{6-4\sqrt{2}}$, $\dfrac{yz}{x} = 2+\sqrt{2}$, $\dfrac{zx}{y} = 3$.

Suma $S = x^2 + y^2 + z^2$ are valoarea egală cu:

A 20 **B** 1 **C** 9 **D** 14 **E** 15

11. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle BAC$. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, M este punctul în care bisectoarea unghiului ABC intersectează a doua oara cercul circumscris triunghiului, $BM \cap AC = \{N\}$, iar $\sphericalangle BOM = 144°$, atunci unghiul ANB are măsura de:

A 120° **B** 108° **C** 36° **D** 72° **E** 150°

12. Fie numărul de două cifre xy**.** Rezultatul calculului $\left|\sqrt{96}-\overline{xy}\right|+\left|\overline{xy}-\sqrt{15000}\right|$ este egal cu:

A $54\sqrt{6}$ **B** $\overline{xy}$ **C** $2\overline{xy}$ **D** $46\sqrt{6}$ **E** $2\overline{xy} + 54\sqrt{6}$

13. Dacă a și b sunt două numere reale astfel încât $-3 \le a \le 2$ și $2b = a - 4$, atunci expresia $\sqrt{2a^2+10b^2-8a+20b+18}+3\sqrt{2b^2-2a^2+80b-16a+128}$ este egală cu:

A $6\sqrt{2}$ **B** $3\sqrt{2}(a-1)$ **C** $9\sqrt{2}$ **D** $9\sqrt{3}$ **E** $6\sqrt{3}$

14. Dacă $\overline{xy}$ este un număr de două cifre, iar $N = \left[\sqrt{159+\overline{xy}}\right]$ (unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a), atunci valorile distincte ale lui N sunt în număr de:

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 1

15. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$), cu $AB = 25$ cm, $CD = 11$ cm și $\sphericalangle B = 45°$. Aria triunghiului BCD este egală cu:

A 98 cm^2 **B** 154 cm^2 **C** 252 cm^2 **D** 175 cm^2 **E** 77 cm^2

16. Pe un cerc de centru O se consideră punctele diametral opuse A și B. Mediatoarea segmentului OB intersectează cercul în punctele C și D. Dacă patrulaterul $AMCD$ este inscriptibil, atunci măsura unghiului AMC este egală cu:

A 150° **B** 120° **C** 130° **D** 60° **E** 75°

17+18. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$), cu $AB = 2CD = 24$ cm și $\sphericalangle B = 45°$. Punctele E și F sunt mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD, punctul G este intersecția dreptelor AF și DE, iar S este aria patrulaterului $CDEF$. Atunci:

A $S = 27$ cm^2 **B** $S = 51$ cm^2 **C** $S = 21$ cm^2 **D** $S = 81$ cm^2 **E** $S = 18$ cm^2

A $EG = 3\sqrt{2}$ cm **B** $EG = 2\sqrt{2}$ cm **C** $EG = 4$ cm **D** $EG = 6$ cm **E** $EG = \sqrt{2}$ cm

19. Numărul $S = \left[\sqrt{\sqrt{1\cdot 2}}\right]+\left[\sqrt{\sqrt{2\cdot 3}}\right]+\ldots+\left[\sqrt{\sqrt{100\cdot 101}}\right]$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a) este egal cu:

A 525 **B** 615 **C** 5050 **D** 625 **E** 825

20. Numerele reale x și y verifică simultan relațiile: $\left\{\frac{2x+y}{8}\right\}+\left[\frac{x+2y}{3}\right]=\frac{1}{4}$ și $\left\{\frac{x+2y}{3}\right\}+\left[\frac{2x+y}{8}\right]=\frac{5}{3}$ ($\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a). Numărul $z = x - y$ este egal cu:

A $\frac{1}{4}$ **B** -4 **C** 0 **D** 8 **E** $\frac{1}{3}$

b) $A = \sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{7}+1}}}} - 1 =$

$= \sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{8+2\sqrt{7}}}}} - 1 = \sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{7}+1}}} - 1 =$

$= \sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{7}+1}} - 1 = \sqrt{\sqrt{7}+7+\sqrt{7}+1} - 1 = \sqrt{8+2\sqrt{7}} - 1 = \sqrt{7}+1-1 = \sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 \in \mathbb{N}$.

IV. Calcul algebric

1. a) $E(x) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x^2 + 6x + 153 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + 144 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - (x+3)^2 = 144 \Leftrightarrow (y - x - 3)(y + x + 3) = 144 = 2 \cdot 72 = 4 \cdot 36 = 12 \cdot 12$ (de exemplu) conduc la: $x = 32$; $x = 13$; $x = -3$ și la $E(32) = 37$, $E(13) = 20$, $E(-3) = 12$; b) Ca mai sus, $(y - x - 3)(y + x + 3) = 144$; $x, y \in \mathbb{Q}$. Fie $k \in \mathbb{Q}^*$ arbitrar și: $\begin{cases} y - x - 3 = k \\ y + x + 3 = \dfrac{144}{k} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{72}{k} - \dfrac{k}{2} - 3 \in \mathbb{Q}$; $y = \dfrac{72}{k} + \dfrac{k}{2} \in \mathbb{Q}$. Deci, pentru orice $k \in \mathbb{Q}^*$, $E\left(\dfrac{72}{k} - \dfrac{k}{2} - 3\right) = \dfrac{72}{k} + \dfrac{k}{2} \in \mathbb{Q}$.

2. $\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}} = \dfrac{5+2\sqrt{6}}{25-24} = 5+2\sqrt{6}$. Deci $(5+2\sqrt{6})^{2008} + \dfrac{1}{(5-2\sqrt{6})^{2008}} = 2(5+2\sqrt{6})^{2008}$. Dar $\dfrac{(10-4\sqrt{6})^{2008}}{2^{2009}} = \dfrac{2^{2008}(5-2\sqrt{6})^{2008}}{2^{2009}} = \dfrac{(5-2\sqrt{6})^{2008}}{2} = \dfrac{1}{2(5+2\sqrt{6})^{2008}}$. Rezultatul calculului este deci 1.

3. a) $n = 1 \Rightarrow 2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$; $n = 2 \Rightarrow 3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$; $n = 3 \Rightarrow 4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$; …; $n = 18 \Rightarrow 19^3 = 18^3 + 3 \cdot 18^2 + 3 \cdot 18 + 1$. Adunând relațiile, rezultă: $19^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 18^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + 18) + 18$, adică $1^2 + 2^2 + ... + 18^2 = \dfrac{19^3 - 18 - 1 - 3 \cdot \dfrac{18 \cdot 19}{2}}{3} = 2109$; b) Dacă numerele ar fi distincte două câte două, atunci suma lor ar fi cel puțin $1^2 + 2^2 + ... + 18^2 = 2109 > 2007$, contradicție. Deci suma are cel puțin două numere care coincid.

4. Cum $\dfrac{x\sqrt{2}+y}{y\sqrt{2}+z} \in \mathbb{Z}$, notăm $\dfrac{x\sqrt{2}+y}{y\sqrt{2}+z} = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Efectuând calculele obținem $\sqrt{2}(x - y \cdot k) = z \cdot k - y$. Dacă $x - yk \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{zk-y}{x-yk}$ imposibil pentru că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, pe când $\dfrac{zk-y}{x-yk} \in \mathbb{Q}$. Deci $x - yk = 0 \Rightarrow zk - y = 0 \Rightarrow k = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z}$ sau $y^2 = xz$.

5. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} - \sqrt{b}\cdot\sqrt{a} + \sqrt{b}^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$.

6. $A = (n^2 + 5)^2 - (2n + 3)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 8)$ este prim dacă $n^2 - 2n + 2 = 1 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n - 1)^2 = 0 \Rightarrow n = 1$. În acest caz, $A = 11$, număr prim.

7. $\sqrt{\overline{abc}-\sqrt{c}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{abc}-\sqrt{c} \in \mathbb{N}$ și $\overline{abc}-\sqrt{c} = k^2$. Cum $\overline{abc}-\sqrt{c} \in \mathbb{N} \Rightarrow$ c cifră pătrat perfect $\Rightarrow c \in \{0, 1, 4, 9\}$. Dacă $c = 0 \Rightarrow \overline{ab0}$ pătrat perfect, imposibil pentru că $b \neq 0$. Dacă $c = 1 \Rightarrow \overline{ab1}-1=\overline{ab0} \Rightarrow$ 400 și 900 pătrate perfecte. Dacă $c = 4 \Rightarrow \overline{ab4}-2=\overline{ab2}$ = pătrat perfect, imposibil. Dacă $c = 9 \Rightarrow \overline{ab9}-3=\overline{ab6}$ = pătrat perfect $\Rightarrow$ 256, 576, 676. Deci A =
= {401, 901, 259, 579, 679}.

8. a) Din $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\sqrt{a}+b} \Rightarrow a-\sqrt{b}=\sqrt{a}+b \Rightarrow a - b - \sqrt{a}-\sqrt{b}=0 \Rightarrow \sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2 -$
$-\sqrt{a}-\sqrt{b}=0 \Rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=0 \Rightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-1)=0$. Cum $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}-1=0 \Rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b}=1$; b) Cum $\sqrt{a}-\sqrt{b}=1 \Rightarrow \sqrt{a}=1+\sqrt{b}$. Cum

$$x=\sqrt{\sqrt{a}+b} \Rightarrow x=\sqrt{1+\sqrt{b}+b}=\sqrt{\left(\sqrt{b}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \Rightarrow x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}.$$

9. $\sqrt{10-\sqrt{n}} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 10-\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ și $10-\sqrt{n}=k^2 \Rightarrow n \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$; $10-\sqrt{n}=k^2 \Rightarrow n \in \{1, 36, 81, 100\}$.

10. a) 50625; 10000; 1296; b) Fie x, y, z cele trei numere scrise inițial; produsul lor este $x \cdot y \cdot z$; la pasul următor scrie: $\sqrt{yz}; \sqrt{xz}; \sqrt{xy}$; produsul lor este tot $x \cdot y \cdot z$ (este invariant). Același lucru se întâmplă și la pașii următori. Dar $256 \cdot 6561 \cdot 390625 \neq 3000 \cdot 2009 \cdot 7175 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ nu este posibil.

11. „$\Rightarrow$” Presupunem prin absurd că numărul $a \cdot b$ este impar. Atunci a și b sunt numere impare, deci $a^2 + b^2$ este par, de forma $4k + 2$. Cum $a^2 + b^2 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$. Observăm că m, n au aceeași paritate $\Rightarrow a^2 + b^2$ este multiplu de 4, imposibil. Dacă m, n au parități diferite $\Rightarrow a^2 + b^2$ este impar, contradicție;
„$\Leftarrow$” Presupunem că $a \cdot b$ este număr par. Dacă a și b sunt pare $\Rightarrow a^2 + b^2 = 4s$. Dacă doar unul dintre a, b este par $\Rightarrow a^2 + b^2 = 2r + 1$. În primul caz, $a^2 + b^2 = 4s = (s + 1)^2 - (s - 1)^2$. În al doilea caz, $a^2 + b^2 = 2r + 1 = (r + 1)^2 - r^2$. Deci în ambele cazuri, $a^2 + b^2$ s-a scris ca diferență de pătrate.

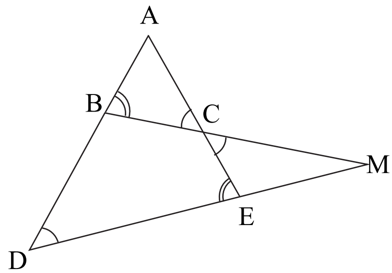
12. a) $(n + 1)(n + 2) = n^2 + 2n + n + 2 = n^2 + 3n + 2$; b) $s = \frac{1}{3}+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{6}=\frac{2+3n+n^2}{6}=$
$=\frac{(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N} \Rightarrow 6 \mid (n + 1)(n + 2) \Rightarrow 2 \mid (n + 1)(n + 2)$ și $3 \mid (n + 1)(n + 2)$. Luăm n =
$= 3k + 1$ sau $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

13. $\frac{3a+4b+5c}{2a+3b}=\frac{3b+4c+5a}{2b+3c}=\frac{3c+4a+5b}{2c+3a}=\frac{12(a+b+c)}{5(a+b+c)}=\frac{12}{5}$; $A = \sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{12}{5}+\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\right)}=$
$=\frac{6}{5}$; [A] = 1.

14. a) $\frac{a+2b}{2a+3b+4c}=\frac{b+2c}{2b+3c+4a}=\frac{c+2a}{2c+3a+4b}=\frac{3(a+b+c)}{9(a+b+c)}=\frac{1}{3}$; $\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{3}}=1 \in$
$\in \mathbb{N}$; b) $\frac{a+2b}{2a+3b+4c}=\frac{1}{3} \Rightarrow 2a + 3b + 4c = 3(a + 2b)$; $\frac{\sqrt{2ab}}{2a+3b+4c} \leq \frac{\frac{a+2b}{2}}{3(a+2b)}=\frac{1}{6}$. Analog:

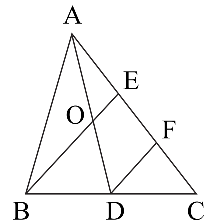
GEOMETRIE

I. Triunghiul. Proprietăți ale triunghiurilor. Triunghiuri asemenea



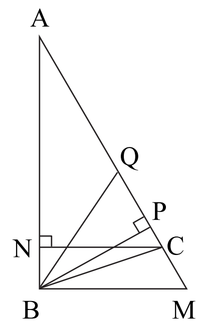
1. a) Vom găsi triunghiurile asemenea, folosind ipoteza problemei și cazurile de asemănare a triunghiurilor.
În ΔABC și ΔAED avem: $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CAB$ (unghi comun); $\frac{AB}{AE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{AC}{AD} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ $\overset{L.U.L}{\Rightarrow} \Delta ABC \sim \Delta AED \Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = 2 \cdot BC =$ $= 12$ cm și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AED$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADE$;

b) În ΔMCE și ΔMDB avem: $\sphericalangle DMB \equiv \sphericalangle CME$ (unghi comun); $\sphericalangle BDM \equiv \sphericalangle ECM \overset{U.U}{\Rightarrow} \Delta MCE \sim$ $\sim \Delta MDB \Rightarrow \frac{CE}{BD} = \frac{CM}{12+EM} = \frac{EM}{BM} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CM}{12+EM} = \frac{EM}{CM+6}$. Avem $\left.\begin{aligned} 2CM = 12 + EM \\ CM + 6 = 2EM \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow 4 \cdot EM - 12 = 12 + EM \Rightarrow EM = 8$ și $CM = 10 \Rightarrow P_{\Delta CME} = CE + EM + CM = 3 + 8 + 10 =$ $= 21$ cm.



2. „$\Rightarrow$” Dacă $[AD]$ mediană, vom demonstra că are loc relația: $AO \cdot$ $\cdot EC = 2 \cdot AE \cdot OD$. Fie $DF \parallel BE$, și cum $[BD] \equiv [CD]$ rezultă cu reciproca teoremei liniei mijlocii, DF linie mijlocie $\Rightarrow EF = FC = \frac{CE}{2}$. În ΔADF, $OE \parallel DF \overset{T.Th}{\Rightarrow} \frac{AO}{OD} = \frac{AE}{EF} \Rightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{AE}{\frac{CE}{2}} \Rightarrow AO \cdot CE =$ $= 2 \cdot AE \cdot OD$.

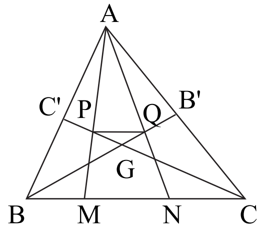
„$\Leftarrow$” Dacă $AO \cdot CE = 2 \cdot AE \cdot OD$, atunci $[BD] \equiv [CD] \Leftrightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{AE}{\frac{CE}{2}}$, (1) și $\frac{AO}{OD} = \frac{AE}{EF} \Rightarrow$ $\Rightarrow EF = \frac{CE}{2} = CF$. În ΔBEC, $FD \parallel BE$ și $[EF] \equiv [FC]$ rezultă cu reciproca teoremei liniei mijlocii, FD linie mijlocie $\Rightarrow [BD] \equiv [DC] \Rightarrow [AD]$ mediană.



4. a) Fie $BP \perp AM$ și $Q \in [AC]$ astfel încât $[AQ] \equiv [QM]$. În ΔBCN și ΔCBP avem: $\sphericalangle BNC \equiv \sphericalangle CPB$ (1 dr); $[BC] \equiv [CB]$; $\sphericalangle NBC \equiv \sphericalangle PCB$ (din ipoteză) $\overset{I.U}{\Rightarrow} \Delta BCN \equiv \Delta CBP \Rightarrow BP = CN = 3$ cm. În ΔABM, $m(\sphericalangle B) = 90°$, $[BQ]$ mediană $\overset{T.medianei}{\Rightarrow} BQ = AQ = QM = \frac{AM}{2}$. ΔABQ isoscel $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\sphericalangle ABQ) = m(\sphericalangle BAQ) = 15°$; $m(\sphericalangle BQP) = m(\sphericalangle BAQ) + m(\sphericalangle ABQ) =$ $= 30°$ (teorema unghiului exterior triunghiului ΔABQ). În ΔBPQ, $m(\sphericalangle P) =$ $= 90°$, $m(\sphericalangle Q) = 30° \Rightarrow m(\sphericalangle QBP) = 60°$. Deci $m(\sphericalangle(BP, BQ)) = 60°$;

b) În ΔBPQ, $m(\sphericalangle P) = 90°$, $m(\sphericalangle Q) = 30° \overset{T.30°}{\Rightarrow} BQ = 2 \cdot BP = 6$ cm și în ΔABM, $AM = 2 \cdot BQ =$

= 12 cm; BP = $\frac{BQ}{2} = \frac{\frac{AM}{2}}{2} = \frac{AM}{4} \Rightarrow$ BP = $\frac{1}{4}$ · AM; c) $A_{ABM} = \frac{AM \cdot BP}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18$ cm^2.



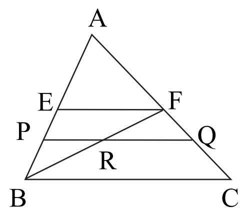
4. a) [BB'] și [CC'] mediane, BB' $\cap$ CC' = {G}; $\frac{PA}{PM} = \frac{3}{2}$ și $\frac{QA}{QN} =$

$= \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{PA}{PM} = \frac{QA}{QN} \overset{R.T.Th}{\Rightarrow}$ PQ || MN, dar [MN] $\subset$ [BC] $\Rightarrow$ PQ || BC.

b) În ΔAMN, PQ || MN $\overset{T.F.A}{\Rightarrow}$ $\Delta APQ \sim \Delta AMN \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN} =$

$= \frac{PQ}{MN}$. Dar $\frac{PA}{PM} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{PA}{PA + PM} = \frac{3}{2+3} \Rightarrow \frac{PA}{AM} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{PQ}{MN} = \frac{3}{5}$, dar MN = $\frac{BC}{3} \Rightarrow$

PQ = $\frac{3}{5}$ · MN = $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$ · BC $\Rightarrow$ 5 · PQ = BC.

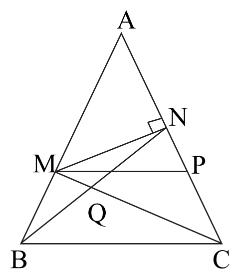


5. [AF] $\equiv$ [FC]. Fie FE || BC rezultă cu reciproca teoremei liniei mijlocii [EF] linie mijlocie $\Rightarrow$ EF = $\frac{BC}{2}$, (1). Din EF || BC și PQ || || BC $\Rightarrow$ EF || PQ $\overset{T.F.A}{\Rightarrow}$ $\Delta BEF \sim \Delta BPR \Rightarrow \frac{PR}{EF} = \frac{BR}{BF} = \frac{BP}{BE}$, (1). În ΔBCF, RQ || BC $\overset{T.F.A}{\Rightarrow}$ $\Delta FQR \sim \Delta FCB \Rightarrow \frac{FR}{FB} = \frac{RQ}{BC} = \frac{FQ}{FC}$;

$\frac{FB - FR}{FB} = \frac{BC - RQ}{BC} \Rightarrow \frac{BR}{FB} = \frac{BC - RQ}{BC}$, (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{PR}{EF} = \frac{BC - RQ}{BC} \Rightarrow$ BC · RP =

$= \frac{BC}{2}$ · (BC – RQ); 2 · BC · RP = BC^2 – BC · RQ $\Rightarrow$ BC · RP + BC · RP + BC · RQ = BC^2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ BC(RP + PQ) = BC^2 $\Rightarrow$ RP + PQ = BC (constantă).



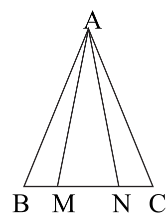
6. a) Fie MP || BC, P $\in$ [AC] $\overset{T.F.A}{\Rightarrow}$ $\Delta AMP \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} =$

$= \frac{MP}{BC}$. Notăm AB = 3a, MA = 2a $\Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ AP = $\frac{2 \cdot 3a}{3}$ = 2a $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ [AM] $\equiv$ [AP] și m($\sphericalangle$MAP) = 60° $\Rightarrow$ ΔAMP echilateral, unde [MN] mediană $\Rightarrow$ MN înălțime $\Rightarrow$ MN $\perp$ AC;

b) În ΔABN și ΔBCM avem: $\sphericalangle$BAN $\equiv$ $\sphericalangle$CBM (60°); [BM] $\equiv$ [AN] (BM = AN = a); [AB] $\equiv$ [BC] (din ipoteză) $\overset{L.U.L}{\Rightarrow}$ $\Delta ABN \equiv \Delta BCM$.

Avem $\sphericalangle$ABN $\equiv$ $\sphericalangle$BCM, $\sphericalangle$ANB $\equiv$ $\sphericalangle$BMC $\Rightarrow$ m($\sphericalangle$BMQ) + m($\sphericalangle$MBQ) = 120°. Unghiul $\sphericalangle$BQC exterior ΔBMQ, rezultă cu teorema unghiului exterior m($\sphericalangle$BQC) = m($\sphericalangle$BMQ) + m($\sphericalangle$MBQ) = = 120°.



7. a) $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NB} = k$, k $\in \mathbb{Q}_+$; avem două cazuri: 1) k < 1 și 2) k > 1.

Dacă k < 1 $\Rightarrow$ B–M–N–C– este ordinea punctelor pe dreapta BC și k > 1 $\Rightarrow$ B–N–M–C– ordinea punctelor pe dreapta BC. Avem BM = = MC · k $\Rightarrow$ BC = MC · (k + 1) și NC = NB · k $\Rightarrow$ BC = NB · (k + 1) $\Rightarrow$

CUPRINS