Nicolae Grigore

MATEMATICĂ OLIMPIADE ŞI CONCURSURI ŞCOLARE

Clasa a VI-a

Probleme selectate pe unități de învățare cu rezolvări complete

Editura NOMINA

ARTITMETICĂ. ALGEBRĂ

I. OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

1. Puteri. Operații cu puteri. Ecuații în mulțimea numerelor naturale

1. a) Fie $n = (2^{90} + 2^{91} + 4^{46}) : (2^{92} + 2^{91} + 4^{44})$. Arătați că $n < 4$.
b) Stabiliți care dintre numerele 2^{90} şi 3^{62} este mai mare.

Etapa locală, Caraş-Severin 2009, prof. Adriana şi Lucian Dragomir

2. Să se afle numărul $a \in \mathbb{N}$, ştiind că: $3^a \cdot (3^a + 1) = 90$.

Etapa locală, Cluj 2009, prof. Gherasim Feurdean

3. a) Rezolvați ecuația: $5 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 + ... + 5 \cdot 6^{2008} = x^{2009} - 1$.
b) Arătați că $\dfrac{6^{2009} - 6}{35} \in \mathbb{N}$.

Etapa locală, Giurgiu 2009, prof. Ionel Tudor

4. Să se calculeze: $(36 \cdot 18^n - 8 \cdot 2^{n-4} \cdot 9^n - 3^{n+1} \cdot 6^{n+1}) : 18^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Etapa locală, Harghita 2009

5. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, ştiind că: $3^{2n} + 9^{n+1} = 30 \cdot 3^{2009}$.

Etapa locală, Ilfov 2009, prof. Gheorghița Furtună

6. Aflați numerele naturale în baza 10 cuprinse între numerele 1000 şi 2000 care împărțite la 217 să dea câtul egal cu restul.

Etapa locală, Mureş 2009

7. Să se arate că numerele: $m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 21$ şi $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 23$ dau acelaşi rest prin împărțirea la 101.

Etapa locală, Teleorman 2009

8. Arătați că există numerele naturale nenule x, y, z, astfel încât $3^{41} = x^2 + y^4 + z^5$.

Etapa locală, Argeş 2010, prof. Angela Ion

9. Găsiţi două numere naturale x şi y cu proprietatea că $(x - y)(x + y + 1) = 2010$.

Etapa locală, Călăraşi 2010, prof. Eugen Predoiu şi Adrian Mărculescu

10. Determinaţi numerele naturale x şi y, ştiind că: $x(y + 5) = (x + 1)(y^2 + 4)$.

Etapa locală, Mehedinţi 2010

11. Rezolvaţi ecuaţia: $10 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + 10 \cdot 11^3 + ... + 10 \cdot 11^{2010} = x^{2011} - 1$.

Etapa locală, Suceava 2010, prof. Tamara Brutaru

12. Scrieţi numărul $A = 1 + 8 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9^3 + ... + 8 \cdot 9^{98}$ folosind numai trei cifre de 9.

Etapa locală, Vâlcea 2010, G.M. 6/2009

13. Determinaţi numerele naturale nenule x şi y, cu $x \geq y$ şi $x^2 + y^2 + x + y = 2^{x-y} + 3$.

Etapa judeţeană, Botoşani 2010, G.M. 6/2009

14. Să se determine numerele naturale a, b, c care verifică relaţia:

$$a + b + c = a \cdot b \cdot c.$$

Etapa judeţeană, Dolj 2010

15. Determinaţi $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $n^4 - n^3 - n^2 + \frac{n}{7} = 2010$.

Etapa judeţeană, Giurgiu 2010, prof. Ionel Tudor

16.a) Rezolvaţi ecuaţia: $8 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 9^2 + ... + 8 \cdot 9^{2010} = x^{2011} - 1$.

b) Pentru x = 9, aflaţi suma cifrelor numărului $A = x + \overline{xx} + \overline{xxx} + ... + \underbrace{\overline{xxx...xx}}_{2011\,\text{cifre}}$.

Etapa judeţeană, Bistriţa 2011

17. Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ din egalitatea:

$$\frac{5^n + 1}{5^n} = \frac{30 \cdot 7^n + 7 \cdot 6^n}{30 \cdot 7^n}.$$

Etapa judeţeană, Alba şi Vluj 2011, prof. Cristian Petru Pop

18. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b, ştiind că: $\frac{5b}{4a + 3} = \frac{b - 1}{a}$.

Etapa judeţeană, Vâlcea 2011, prof. D.M. Bătineţu, G.M. 4/2009

19. Care sunt numerele naturale prime p şi r pentru care avem:

$$p + p^2 + p^3 + r + r^2 + r^3 = 2393.$$

Etapa județeană, Harghita 2011

20. Determinați tripletele (x, y, z) de numere naturale, știind că $\dfrac{x-10^2}{10^3}=\dfrac{234}{yz+y}=\dfrac{y}{10}$.

Etapa județeană, Dâmbovița 2011, prof. Damian Marinescu şi Sorin Ion

21.a) Aflați $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât: $\dfrac{2011}{x}+\dfrac{2012}{x+1}+\dfrac{2013}{x+2}+...+\dfrac{2109}{x+98}+\dfrac{2110}{x+99}=100$.

b) Determinați numărul natural n, pentru care numărul $N = 5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} + 5^{n+3}$ are exact 120 de divizori naturali.

Etapa județeană, Olt 2011

22. Numerele naturale x, y şi z verifică relațiile:

$$x + 3y + 5z = 200 \text{ şi } x + 4y + 7z = 225.$$

Determinați valoarea sumei x + y + z.

Etapa județeană, Bucureşti 2011, G.M.

23. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația: $x \cdot 3^{2011} = (3^{2011}-1):\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^{2010}}\right)$.

Etapa locală, Suceava 2011

24. Determinați numerele naturale m şi n astfel încât $7 \cdot 2^m = 2^n - 1$.

Etapa locală, Neamț 2011

25. Fie numărul $n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2012}$.

a) Arătați că n nu este multiplu al lui 2012.

b) Calculați restul împărțirii lui n la 31.

Etapa locală, Cluj, 2012, prof. Sorin Borodi

26. Să se determine restul împărțirii numărului $N = 863\underbrace{99...9}_{2012\text{ cifre}}$ la numărul 32.

Etapa locală, Galați, 2012

17. Să se determine numerele naturale x şi y care verifică relația:

$$3^x + 19 = 28^y.$$

Etapa locală, Galați, 2012

28. Fie numărul $A = 4 + 8 + 12 + \ldots + 328$.

a) Calculați A.

b) Înlocuiți un număr minim de semne „+” cu semne „–” astfel încât $A = 2012$.

Etapa locală, Suceava, 2012, prof. Stela Boghian

29. Fie mulțimea $M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{2n+1}{3} \in \mathbb{N} \text{ şi } \frac{3n+1}{4} \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Aflați două elemente ale mulțimii M.

b) Determinați mulțimea M.

Etapa locală, Suceava, 2012, prof. Tamara Brutaru

30. a) Arătați că numărul $A = 10^{20} + 3 \cdot 10^{10} - 1$ nu este pătrat perfect.

b) Comparați numerele 128^{11} şi 65^{13}.

Etapa locală, Vâlcea, 2012, G.M. nr. 10-11/2011

31.a) Rezolvați în $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ecuația $4x + 503y = 2012$.

b) Stabiliți dacă numerele $2^{2013} \cdot 5^{2012} + 2012$ şi $4^{1006} \cdot 5^{2013} + 1$ sunt pătrate perfecte.

Etapa locală, Vrancea, 2012, prof. Constantin Fudulică

32. Scrieți numărul $7 \cdot (3 + 7^{2010})$ ca o sumă de 7 numere naturale consecutive.

Etapa locală, Bacău, 2012

33. Să se determine numerele naturale a şi b, ştiind că $2^{3a} - 2^{3b} = \overline{xyz}$ şi $\overline{xyz}$ este număr impar.

Etapa locală, Mureş, 2012, G.M. nr. 10/2011

34. Să se determine numerele naturale m, n, p, $n \geq 5$ din egalitatea:

$$5^{3m+1} + 2^{n-5} + 6^{n-3} = 663 - 1^p.$$

Etapa locală, Gorj, 2012

35. Împărțind numerele 2301, 3004 şi 3559 la acelaşi număr natural diferit de zero, se obține acelaşi rest nenul. Aflați împărțitorul.

Etapa locală, Satu Mare, 2012, prof. Cătălina Nagy

36. Se consideră numerele $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2011$, $b = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2011$ şi $c = 2011^2 + 2011^1 + 2011^0$. Determinați restul împărțirii numerelor a, b, respectiv c la 2012.

Etapa locală, Harghita, 2012, prof. Péter Szőcs

37. Determinați numerele naturale nenule x, y şi z care verifică relațiile:

$$\frac{3x}{x+3}=\frac{5y}{y+5}=\frac{7\cdot z}{z+7}.$$

Etapa locală, Olt, 2013, prof. Daniela Nadia Taclit

38. a) Rezolvați în mulțimea numerelor prime următoarea ecuație: $2m + 3p + 4t = 56$.

Etapa locală, Satu Mare, 2013, prof. Gabiela Tempfli

b) Fie $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2010$ şi $m = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2010$. Aflați restul împărțirii lui $n + m$ la 2010.

Etapa locală, Suceava 2010, G.M. nr. 2/2012

39. Determinați numerele naturale x, y, z din egalitatea $4 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^y + 2 \cdot 16^z = 2592$.

Etapa locală, Mureş, 2013, G.M.

40. Fie numerele $a = 8 \cdot 3^{n+2} \cdot 25^{n+1}$ şi $b = 7 \cdot 5^{n+2} \cdot 15^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Comparați cele două numere.

b) Arătați că cele două numerele dau acelaşi rest prin împărțirea cu 165, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Etapa locală, Neamț, 2015

41. Media aritmetică a numerelor naturale distincte $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2014}$, 2014 şi 2016 este 2015.

a) Aflați media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2014}$.

b) Dacă numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2014}$ sunt pare, arătați că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2014} = 0$.

Etapa locală, Neamț, 2015

42. Determinați numerele $a, b, c \in \mathbb{N}$, cu $a < b$, astfel încât $\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}=\frac{c+3}{c+1}$.

Etapa locală, Suceava, 2015

43. Fie numerele $x = \frac{a}{b-2}$ şi $y = \frac{3b-6}{a-3}$. Să se determine perechile (a, b) de numere naturale astfel încât x şi y să fie simultan numere naturale.

Etapa locală, Vaslui, 2015

GEOMETRIE

I. Puncte. Drepte. Segmente de dreaptă. Operații cu lungimi de segmente

1. Se dau punctele coliniare A, B, C, D dinstincte în această ordine, astfel încât $3 \cdot AB = 10 \cdot AC - 7 \cdot AD$ şi $BD = 20$ cm.

a) Să se afle BC şi CD.

b) Dacă P este mijlocul segmentului AD şi $P \in (BC)$, precizați valoarea maximă în numere naturale a lungimii segmentului AD.

Etapa locală, Argeş 2009

2. Se consideră trei puncte coliniare A, B şi C, astfel încât $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$ şi $AC = 40$ cm. Fie M şi P mijloacele segmentelor [AB], respectiv [BC]. Să se determine:

a) lungimile segmentelor [AB] şi [BC]; b) valoarea raportului $\frac{AP}{MC}$.

Etapa locală, Constanța 2009

3. Pe o dreaptă luăm punctele A, B, C, D, astfel încât $AB = a$ cm, $AC = b$ cm, $BD = c$ cm, $BC = a + b$ cm, $CD = a + b - c$ cm, $AD = c - a$ cm. În ce ordine sunt situate punctele pe dreaptă?

Etapa locală, Harghita 2009, prof. Csuszner Jolán

4. Punctul C este mijlocul segmentului AB, D este mijlocul segmentului BC, E este mijlocul segmentului CD, iar F este un punct situat pe semidreapta (EB, astfel încât $EB = BF = 3$ cm.

a) Arătați că $ED = 1$ cm şi $BD = 2$ cm.

b) Aflați lungimea segmentului AF.

Etapa locală, Sălaj 2011, Maramureş 2009

5. Fie $A_1, A_2, A_3, ..., A_{10}$ puncte coliniare, distincte, în această ordine. Ştiind că $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = (1 + 2)$ cm, ..., $A_9A_{10} = (1 + 2 + 3 + ... + 9)$ cm, aflați lungimea segmentului A_1A_{10}.

Etapa locală, Mureş 2009, prof. Dorel Gruiță

6. Fie M_1 mijlocul segmentului [AB], M_2 mijlocul segmentului $[AM_1]$, M_3 mijlocul segmentului $[AM_2]$, ..., M_n mijlocul segmentului $[AM_{n-1}]$. Dacă $AM_n = 1$, calculați S = $= AM_n + AM_{n-1} + ... + AM_3 + AM_2 + AM_1$. Aflați n, ştiind că S = 127.

Etapa locală, Prahova 2009, prof. Ion Tomescu şi prof. Ion Lupea

7. Se consideră punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ coliniare, în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, ..., $A_{n-1}A_n = n - 1$ cm, n fiind un număr natural, n > 1.

a) Calculați lungimea segmentului $[A_1A_{24}]$.

b) Să se determine numărul natural n, astfel încât lungimea segmentului $[A_7A_n]$ să fie de 279 cm.

c) Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor $[A_1A_4]$ şi $[A_{21}A_{24}]$.

Etapa locală, Satu Mare 2009, prof. Anca Camelia Vanț

8. Fie punctele A, B, C şi D coliniare, astfel încât AD = AC + CD, D $\in$ (BC). Arătați că dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor [AC] respectiv [BD], atunci $\frac{AD + DC}{MN} = 2$.

Etapa locală, Covasna 2011

9. Punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2010}$ se află pe o dreaptă. $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 3$ cm, $A_3A_4 = 5$ cm, $A_4A_5 = 7$ cm, ..., şi aşa mai departe, astfel încât $A_nA_{n+1} = 2n - 1$ cm pentru celelalte segmente.

a) Aflați lungimea segmentelor $A_{23}A_{24}$ şi $A_{41}A_{45}$.

b) Calculați lungimea segmentului A_1M, unde M este mijlocul segmentului A_1A_{2010}.

Etapa locală, Gorj 2011

10. Fie segmentul AB şi $M_1, M_2, M_3, ..., M_{10}$ mijloacele segmentelor [AB], $[M_1B]$, $[M_2B]$, ..., $[M_9B]$. Dacă AB = 1024 cm, calculați lungimea segmentului $[M_4M_9]$.

Etapa locală, Iaşi 2011

11. Fie punctele A, B, C şi D (în această ordine) pe dreapta d, astfel încât $BC = 3 \cdot AB$, $CD = 3 \cdot BC$. Dacă M este mijlocul segmentului [AC] şi N mijlocul segmentului [BD], iar AC = 9,6 cm, aflați lungimea segmentelor BC, CD şi MN.

Etapa locală, Mehedinți 2011

12. Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C, D, E, F, în această ordine, astfel încât AB = BC, BD = DE, CE = EF, iar AF = 48 cm.

a) Calculați DE.

b) Dacă, în plus, mijlocul segmentului [DE] coincide cu mijlocul segmentului [AF], calculaţi AB şi EF.

Etapa locală, Neamț 2011

13. Fie segmentul [AB] şi punctele C, D, E pe acest segment, astfel încât: $BC = \frac{AB}{4}$, D mijlocul segmentului AC şi $DE = \frac{AD}{3}$.

a) Precizaţi poziţia punctului E astfel încât $[AE] \equiv [BC]$.

b) Arătaţi că segmentele [AB] şi [CE] au acelaşi mijloc.

c) Dacă punctul M este mijlocul segmentului [CE] şi DM = 4 cm, calculaţi lungimea segmentului AB.

Etapa locală, Olt 2011, prof. Victoria Negrilă

14. Pe o dreaptă se iau punctele O, A_1, A_2, A_3, ..., A_{10} şi simetricele lor faţă de punctul O: B_1, B_2, B_3, ..., B_{10}, astfel încât $OA_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm, $A_2A_3 = 2^2$ cm, ..., $A_9A_{10} = 2^9$ cm.

a) Comparaţi lungimea segmentului $[B_5A_{10}]$ cu lungimea segmentului $[B_8A_5]$.

b) Dacă M este mijlocul segmentului $[OA_8]$, aflaţi k pentru care $M \in [A_kA_{k+1}]$.

Etapa locală, Vaslui 2011

15. Se consideră punctele A_1, A_2, ..., A_{20} coliniare, în această ordine, astfel încât: $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, ..., $A_{19}A_{20} = 19$ cm. Să se calculeze:

a) lungimea segmentului $[A_1A_{20}]$;

b) distanţa dintre mijloacele segmentelor $[A_1A_4]$ şi $[A_{17}A_{20}]$.

Etapa locală, Alba 2010

16. Se dă un segment [AB] pe care îl împărţim în trei părţi egale şi la o treime de B luăm punctul A_1, împărţim segmentul A_1B în trei părţi egale şi la o treime de B luăm punctul A_2, şi aşa mai departe, până ajungem la A_{2010}. Care este cea mai mică lungime, exprimată printr-un număr natural, pe care trebuie să o aibă [AB] pentru ca lungimea segmentului $[A_{2010}B]$ exprimată printr-un număr natural să fie cea mai mică?

Etapa locală, Alba 2010, Nicolae Ivăşchescu

17. Fie A, B şi C trei puncte coliniare cu $B \in (AC)$, iar punctul M este mijlocul segmentului [BC]. Dacă AB = p cm şi BC = q cm, unde p şi q sunt numere prime, iar AM = 7,5 cm, calculaţi lungimea segmentului [AC].

Etapa locală, Bacău 2010

18. Fie A_0, A_1, A_2, ..., A_k puncte coliniare, în această ordine. Segmentul $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 = 3$ şi aşa mai departe, fiecare segment este cu o unitate mai lung decât segmentul precedent. Dacă $MN = 60$, unde M este mijlocul segmentului $[A_0A_1]$ şi N este mijlocul segmentului $[A_{k-1}A_k]$, aflaţi lungimea segmentului $[A_0A_k]$.

Etapa locală, Bihor 2010

19. Fiind date 2010 puncte distincte în plan, să se indice:

a) în ce caz se obţine cel mai mic număr de drepte determinate de câte două puncte şi care este acel număr;

b) în ce caz se obţine cel mai mare număr de drepte determinate de câte două puncte şi care este acel număr;

c) se pot duce 2009 drepte? Justificaţi răspunsul.

Etapa locală, Braşov 2010, prof. Dorina Bocu

20. Fie A, B două puncte situate pe dreapta d. Să se determine numerele $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care există punctele $P_1, P_2, ..., P_n \in d - [AB]$ cu proprietate că suma distanţelor de la A la $P_1, P_2, ..., P_n$ este egală cu suma distanţelor de la B la punctele $P_1, P_2, ..., P_n$.

Etapa pe sectoare, Bucureşti, prof. Daniela Chiteş

21. Pe dreapta d se iau punctele distincte A şi B, iar pe $AB - [AB]$ se consideră 2009 puncte distincte. Să se arate că suma distanţelor de la punctul A la cele 2009 puncte este diferită de suma distanţelor de la punctul B la cele 2009 puncte.

Etapa locală, Călăraşi 2010, G.M. 12/2009

22. Pe o dreaptă se consideră punctele A, C, D şi B, în această ordine, astfel încât $7 \cdot AC = 3 \cdot CB$ şi $3 \cdot AD = 2 \cdot DB$. Arătaţi că $AB = 10 \cdot CD$.

Etapa locală, Covasna 2010

23. A, B, C, D sunt patru puncte coliniare, astfel încât $B \in [AC]$, $C \in [BD]$, $BC = 3 \cdot AB$ şi $CD = 2 \cdot BC$. Aflaţi lungimile segmentelor [AB], [BC], [CD], ştiind că M şi N sunt mijloacele segmentelor [AC], respectiv [AD], iar $MN = 15$ cm.

Etapa locală, Gorj 2010

24. Pe o dreaptă se consideră în această ordine, punctele A, B, C, D astfel încât $AB = 3$ cm, $BC = 8$ cm şi $AD = 14$ cm.

a) Să se demonstreze că segmentele [AD] şi [BC] au acelaşi mijloc.

b) Dacă notăm cu M mijlocul lui [AD], demonstraţi că:

$$4 \cdot BM^2 = 2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BD^2 - AD^2.$$

Etapa locală, Hunedoara 2010

lungimea segmentului $[A_3A_4]$ este jumătate din lungimea segmentului $[A_2A_3]$, …, lungimea segmentului $[A_{2011}A_{2012}]$ este jumătate din lungimea segmentului $[A_{2010}A_{2011}]$.

a) Calculați lungimea segmentului $[A_1A_2]$, ştiind că $A_3A_4 = 8$ cm.

b) Demonstrați că $A_1A_{2012} < 2A_1A_2$. Demonstrați că $A_pA_n > A_nA_{2012}$, oricare ar fi $p, n \in \mathbb{N}$ mai mici ca 2012 şi $p < n$.

Etapa locală, Timiş, 2012

42. Fie A, B, C, D puncte coliniare în această ordine. Ştiind că AB = 6 cm. BC = 4 cm, CD = 10 cm, iar M, N, P sunt mijloacele segmentelor [AB], [BC] şi [CD], arătați că:

a) $[MN] \equiv [CP]$;

b) $[NQ] \equiv [QC]$, unde $Q \in [AD]$ astfel încât $AD - 2AQ = 2$ cm.

Etapa locală, Ilfov, 2012, prof. Aurel Mihăilă

43. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare, în această ordine, astfel încât:

$$AB + 2BC + 3CD = 2AD.$$

a) Arătați că AB = CD:

b) Determinați punctul $M \in (BC)$ astfel încât $AM \cdot MC = BM \cdot MD$.

Etapa locală, Ialomița, 2012

44. Fie punctele coliniare A, B, C, D, în această ordine. Dacă M, N, P sunt mijloacele segmentelor [AB], [BC], [CD] şi MN = 9 cm, NP = 7 cm, iar AB + CD = 16 cm, să se calculeze lungimile segmentelor AB, BC, CD.

Etapa locală, Maramureş, 2012, S.G.M. nr. 11/2011

45. Pe o dreaptă d se iau, în această ordine, punctele A_1, A_2, A_3, …, A_{20} astfel încât $A_1A_2 = 6$ cm, $A_2A_3 = 12$ cm, $A_3A_4 = 18$ cm ş.a.m.d.

a) Ce lungime are segmentul $[A_1A_{20}]$? Dar segmentul $[A_{15}A_{20}]$?

b) Determinați $i \in \mathbb{N}^*$ pentru care $M \in [A_iA_{i+1}]$, unde M este mijlocul segmentului $[A_1A_{20}]$.

Etapa locală, Iaşi, 2013

46. Pe dreapta d se iau punctele A şi B, iar pe AB – [AB] se consideră 2013 puncte distincte. Să se arate că suma distanțelor de la A la cele 2013 puncte este diferită de suma distanțelor de la B la cele 2013 puncte.

Etapa locală, Neamț, 2013, G.M. nr. 9/2009

47. Fie segmentul [AB] şi punctele $M_1, M_2, \ldots, M_{2013}$ mijloacele segmentelor [AB], $[AM_1]$, $[AM_2]$, …, $[AM_{2013}]$. Arătați că $AM_1 + AM_2 + AM_3 + \ldots + AM_{2013}$ nu depăşeşte lungimea segmentului [AB].

Etapa locală, Prahova, 2013, prof. Ion Lupea şi Ion Tomescu

48. Fie punctele A, C, D, B coliniare, în această ordine, astfel încât $[AD] \equiv [CB]$, iar M mijlocul segmentului [CD]. Arătați că segmentele [AB] şi [CD] au acelaşi mijloc.

Etapa locală, Vâlcea, 2013

49. Fie punctele coliniare A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, în această ordine, astfel încât AB = 1 cm, BC = 2 cm, CD = 3 cm, …, JK = 10 cm.

a) Determinați lungimea segmentului AK.

b) Determinați lungimea segmentului CH.

c) Dacă M este mijlocul segmentului BK, determinați lungimea segmentului MK.

Etapa locală, Vrancea, 2013, G.M. 2012

50. Pe segmentul [AB] se consideră punctele C, D, E, F, în această ordine, astfel încât $AC = \frac{1}{7} \cdot AB$, $CD = \frac{9}{35} \cdot AB$, $DE = \frac{1}{10} \cdot AB$, $EF = \frac{1}{3} EB$. Să se afle cel mai mic număr natural nenul astfel încât segmentul [AB] să poată fi împărțit în n segmente congruente, iar C, D, E, F să fie unele dintre punctele de diviziune.

Etapa locală, Vrancea, 2013, prof. Daniela Sîrghie

51. Considerăm segmentul [AB] de lungime 1 m. Notăm cu P_1 mijlocul segmentului [AB] şi A_1 mijlocul segmentului $[P_1B]$. Alegem P_2 astfel încât B să fie mijlocul segmentului $[A_1P_2]$. Notăm cu P_3 mijlocul segmentului $[A_1B]$ şi A_3 mijlocul segmentului $[P_3B]$. Alegem P_4 astfel încât B să fie mijlocul segmentului $[A_3P_4]$. Construim în acelaşi mod cu punctele P_6, P_7, A_7, …

a) Care este lungimea segmentului $[AA_5]$?

b) În şirul $P_1, P_2, P_3, \ldots$ alegeți două puncte consecutive astfel încât distanța dintre ele să fie mai mică decât 1 mm.

Etapa locală, Vrancea, 2013, prof. Mirela Novetschi

52. Pe o dreaptă d se consideră punctele diferite $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, în această ordine, astfel încât lungimea segmentului $[A_0A_1]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_2]$, lungimea segmentului $[A_0A_2]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_3]$, lungimea segmentului $[A_0A_3]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_4]$, …, lungimea segmentului $[A_0A_9]$ este o treime din lungimea segmentului $[A_0A_{10}]$. Fie M_0, M_1, M_2, …, M_9 respectiv mijloacele segmentelor $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, …, $[A_9A_{10}]$. Ştiind că lungimea segmentului $[A_9A_{10}]$ este 118098 cm, să se calculeze:

a) lungimile segmentelor $[A_0A_1]$, $[A_4A_5]$, $[A_5A_6]$;

b) distanța dintre punctele M_4 şi M_7.

Etapa locală, Galați, 2013, prof. Viorica Bujor

53. Se consideră punctele distincte A, B, C, D astfel încât punctul B este mijlocul segmentului (AC) şi punctul C este mijlocul segmentului (BD). Să se demonstreze că:

a) $BC = \dfrac{AC + BD}{2}$; b) $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BD} < \dfrac{4}{AD}$.

Etapa locală, Galați, Vaslui, 2015

54. În interiorul segmentului AB cu lungimea de 160 cm, se consideră punctele C şi D astfel încât $3 \cdot CA = 2 \cdot CB$, iar $5 \cdot AD = 3 \cdot DB$.

a) Să se calculeze lungimile segmentelor CA şi CB.

b) Să se stabilească ordinea punctelor A, B, C şi D pe dreapta AB.

c) Dacă O este mijlocul segmentului AB, să se calculeze raportul segmentelor OC şi OD.

Etapa locală, Bacău, 2015

55.a) Considerăm punctele coliniare A_0, A_1, A_2, …, A_{2015} (în această ordine), astfel încât $A_0A_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm, …, $A_{2014}A_{2015} = 2015$ cm. Să se calculeze distanța dintre punctele A_{1000} şi A_{2015}.

b) Fie A, B, C, D, E şi F şase puncte, astfel încât oricare trei dintre punctele date sunt necoliniare. Colorăm fiecare dintre segmentele determinate de ele, fie cu portocaliu, fie cu violet, la întâmplare. Demonstrați că există un triunghi cu vârfurile în trei dintre cele şase puncte, care are toate laturile de aceeaşi culoare.

Etapa locală, Bihor, 2015

56. O, A, B, C sunt puncte coliniare în această ordine, $OA = 2^x$ cm, $OB = 2^{x+1}$ cm, $OC = 2^{x+2}$ cm, $x \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că BC = OA + AB.

b) Dacă M este mijlocul segmentului [OA] şi N este mijlocul segmentului [BC], iar MN = 20 cm, aflați lungimea segmentului [AC].

Etapa locală, Constanța, 2015

57. Pe dreapta d, se consideră punctele O, A, B, C, D, E, F, în această ordine, astfel încât $AB = 2 \cdot OA$, B este mijlocul lui [AC], C este mijlocul lui [BD], D este mijlocul lui [BE] şi E este mijlocul lui [BF]. Să se arate că:

a) segmentele ([AE], [CD]), respectiv ([AD], [BC]) au acelaşi mijloc;

b) $\frac{AC}{BE} + \frac{AB}{AD} + \frac{BC}{EF} + \frac{OA}{DE} > \frac{CF}{OE}$.

Etapa locală, Dolj, 2015

58. Se consideră segmentul [AB]. Notăm M mijlocul lui [AB], M_1 mijlocul lui [BM], M_2 mijlocul lui [M_1A], M_3 mijlocul lui [M_2B], M_4 mijlocul lui [AM_3]. Se ştie că $M_1M_3 = M_2M_4 + 2$ cm.

a) Aflați lungimea segmentului [AB].

b) Notam cu M_a şi M_b mijloacele segmentelor [M_2M_4] şi [M_1M_3]. Arătați că M_a este mijlocul lui [AM_b].

Etapa locală, Gorj, 2015

59. Pe semidreapta (OB se consideră punctele $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ astfel încât $OB = 2$ cm, $OA_1 = 1$ cm şi $A_nA_{n+1} = \frac{1}{2^n}$ cm, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Care este cea mai mare lungime posibilă a segmentului [A_1A_{10}]? Dar cea mai mică?

b) Arătați că, indiferent de modul lor de aşezare (în condițiile problemei), toate punctele A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) aparțin segmentului (OB).

Etapa locală, Iaşi, 2015

SOLUȚII

ARITMETICĂ. ALGEBRĂ

I. Operații cu numere naturale

1. Puteri. Operații cu puteri. Ecuații în mulțimea numerelor naturale

1. a) $n = (2^{90} + 2^{91} + 2^{92}) : (2^{92} + 2^{91} + 2^{88}) = 2^{90} \cdot (1 + + 2 + 4) : [2^{88} \cdot (16 + 8 + 1)] = (7 \cdot 2^{90}) : : (25 \cdot 2^{88}) \Rightarrow\ n = \dfrac{28}{25} < 4$; b) $2^{90} = (2^3)^{30} = 8^{30} < 9^{30} = 3^{60} < 3^{62}$ sau $3^{62} = (3^2)^{31} = 9^{31} > 8^{31} = 2^{93}$. Deci $2^{90} < 3^{62}$. **2.** $3^a \cdot (3^a + 1)$ este produs de două numere naturale consecutive iar $90 = 9 \cdot 10 \Rightarrow 3^a = 9$ şi $3^a + 1 = 10 \Rightarrow 3^a = 3^2 \Rightarrow a = 2$ şi $3^a = 10 - 1 \Rightarrow a = 2$. Deci $a = 2$. **3.** a) Scriem $5 = = 6 - 1$ şi înlocuim: $(6 - 1) + (6 - 1) \cdot 6 + (6 - 1) \cdot 6^2 + ... + (6 - 1) \cdot 6^{2008} = x^{2009} - 1 \Leftrightarrow 6 - 1 + + 6^2 - 6 + 6^3 - 6^2 + ... + 6^{2009} - 6^{2008} = x^{2009} - 1 \Leftrightarrow 6^{2009} - 1 = x^{2009} - 1 \Rightarrow x^{2009} = 6^{2009} \Rightarrow x = = 6$; b) Observăm că $6^{2009} - 6$ se poate scrie: $6^{2009} - 6 = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^3 + ... + 5 \cdot 6^{2008}$ sumă cu 2008 termeni; $6^{2009} - 6 = 5 \cdot 6(1 + 6) + 5 \cdot 6^3(1 + 6) + ... + 5 \cdot 6^{2007}(1 + 6) = 30 \cdot 7(1 + + 6^2 + ... + 6^{2006}) = 35 \cdot 6 \cdot (1 + 6^2 + ... + 6^{2006})$. Deci $35 \mid 6^{2009} - 6$; SAU $6^{2009} - 6 = (5 + 1)^{2009} - - 6 = M_5 + 1 - 6 = M_5$ şi $6^{2009} - 6 = (7 - 1)^{2009} - 6 = M_7 - 1 - 6 = M_7$ şi $(5, 7) = 1 \Rightarrow 35 \mid 6^{2009} - - 6$. **4.** $[2 \cdot 18 \cdot 18^n - 2^{n-1} \cdot 9^n - (3 \cdot 6)^{n+1}] : 18^{n-1} = (2 \cdot 18^{n+1} - 18^{n-1} \cdot 9 - 18^{n+1}) : 18^{n-1} = 18^{n-1} \cdot \cdot (2 \cdot 18^2 - 9 - 18^2) : 18^{n-1} = 2 \cdot 324 - 333 = 315$. **5.** Egalitatea este echivalentă cu: $3^{2n} \cdot (1 + 9) = = 30 \cdot 3^{2009} \Leftrightarrow 3^{2n} \cdot 10 = 10 \cdot 3^{2010} \Leftrightarrow 3^{2n} = 3^{2010} \Leftrightarrow 2n = 2010 \Rightarrow n = 1005$. **6.** $1000 < n < < 2000$; $n = 217 \cdot c + r$, $r < 217$, $c = r \Rightarrow n = 218 \cdot c \Rightarrow 1000 < 218c < 2000 \mid : 218 \Rightarrow 4 < c < < 10 \Rightarrow c \in \{5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow n \in \{218 \cdot 5; 218 \cdot 6; 218 \cdot 7; 218 \cdot 8; 218 \cdot 9\} \Rightarrow n \in \{1090, 1308, 1526, 1712, 1962\}$.

7. *Soluția I*: $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 21 \cdot (22 \cdot 23) = m \cdot 506 = m \cdot (5 \cdot 101 + 1) \Rightarrow n = 5 \cdot 101 \cdot m + + m \Rightarrow n - m = M_{101}$. Deci numerele naturale m şi n dau acelaşi rest la împărțirea cu 101.

Soluția a II-a: $m = 19! \cdot 420 = 19!(4 \cdot 101 + 16)$; $n = 19! \cdot 212520 = 19!(2104 \cdot 101 + 16)$; $n - - m = 19! \cdot 2100 \cdot 101 \Rightarrow 101 \mid (n - m) \Rightarrow$ numerele n şi m dau acelaşți rest la împărțirea cu 101. **8.** Vom scrie numărul 3^{41} ca o sumă de trei puteri cu baza 3; $3^{41} = 3 \cdot 3^{40} = 3^{40} + 3^{40} + + 3^{40} = (3^{20})^2 + (3^{10})^4 + (3^8)^5 = x^2 + y^4 + z^5$. Deci există numerele naturale $x = 3^{20}$, $y = 3^{10}$, $z = = 3^8$, astfel încât $3^{41} = x^2 + y^4 + z^5$. **9.** $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$; $2010 = 1 \cdot 2010 = 2 \cdot 1005 = = 3 \cdot 670 = 5 \cdot 402 = 6 \cdot 335 = 10 \cdot 201 = 15 \cdot 134 = 30 \cdot 67$. Avem: 1) $(x - y)(x + y + 1) = = 1 \cdot 2010 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y + 1 = 2010 \end{cases} \Rightarrow 2x = 2010 \Rightarrow x = 1005$ şi $y = 1004$ sau $\begin{cases} x - y = 2010 \\ x + y = 0 \end{cases}$ imposibil; $y \neq 0$, $x - y < x + y$; 2) $(x - y)(x + y + 1) = 2 \cdot 1005 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 1004 \end{cases} \Rightarrow 2x = 1006 \Rightarrow x = 503$ şi $y = 501$; 3) $(x - y)(x + y + 1) = 3 \cdot 670$, dar $x - y < x + y + 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 669 \end{cases} \Rightarrow 2x = = 672 \Rightarrow x = 336$ şi $y = 333$; 4) $(x - y)(x + y + 1) = 5 \cdot 402$, dar $x - y < x + y + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=5 \\ x+y=401 \end{cases} \Rightarrow 2x = 406 \Rightarrow x = 203$ şi $y = 198$; 5) $(x - y)(x + y + 1) = 6 \cdot 335$, dar $x - y < x + y + 1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=6 \\ x+y=334 \end{cases} \Rightarrow 2x = 340 \Rightarrow x = 170$ şi $y = 164$; 6) $(x - y)(x + y + 1) = 10 \cdot 201$, dar $x - y < x + y + 1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=10 \\ x+y=200 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow 2x = 210 \Rightarrow x = 105$ şi $y = 95$;

7) $(x - y)(x + y + 1) = 15 \cdot 134$, dar $x - y < x + y + 1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=15 \\ x+y=133 \end{cases} \Rightarrow 2x = 148 \Rightarrow x = 74$ şi $y = 59$; 8) $(x - y)(x + y + 1) = 30 \cdot 67$, dar $x - y < x + y + 1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=30 \\ x+y=66 \end{cases} \Rightarrow 2x = 96 \Rightarrow x = 48$ şi $y = 18$. Deci $(x, y) \in \{(1005, 1004); (503, 501); (336, 333); (203, 198); (170, 164); (105, 95); (74, 59); (48, 18)\}$.

10. *Soluția I*: Egalitatea dată este echivalentă cu: $x(y + 5) = x(y^2 + 4) + y^2 + 4 \Leftrightarrow x(-y^2 + y + 1) = y^2 + 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2+4}{-y^2+y+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y \in \{0, 1\}$. Pentru $y \neq \{0, 1\} \Rightarrow -y^2 + y + 1 < 0$ şi $x \notin \mathbb{N}$. Dacă $y = 0 \Rightarrow x = 4$ şi $y = 1 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow (x, y) \in \{(4, 0); (5, 1)\}$.

Soluția a II-a: Egalitatea din enunț este echivalentă cu: $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{y^2+4}{y+5}$, dar $\dfrac{x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2+4}{y+5} < 1 \Leftrightarrow y^2 - y < 1 \Leftrightarrow y(y - 1) < 1 \Rightarrow y \in \{0, 1\}$. Dacă $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow 5x = 4x + 4 \Rightarrow x = 4$. Dacă $y = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow 6x = 5x + 5 \Rightarrow x = 5$. Deci $(x, y) \in \{(4, 0); (5, 1)\}$. **11.** Înlocuim $10 = 11 - 1$; $11 - 1 \cdot (11 - 1) \cdot 11 + (11 - 1) \cdot 11^2 + (11 - 1) \cdot 11^3 + ... + (11 - 1) \cdot 11^{2010} = x^{2011} - 1 \Leftrightarrow 11 - 1 + 11^2 - 11 + 11^3 - 11^2 + 11^4 - 11^3 + ... + 11^{2011} - 11^{2010} = x^{2011} - 1 \Leftrightarrow 11^{2011} - 1 = x^{2011} - 1 \Leftrightarrow x^{2011} = 11^{2011} \Rightarrow x = 11$. **12.** $8 = 9 - 1 \Rightarrow A = 1 + 9 - 1 + (9 - 1) \cdot 9 + (9 - 1) \cdot 9^2 + (9 - 1) \cdot 9^3 + ... + (9 - 1) \cdot 9^{98}$; $A = 1 + 9 - 1 + 9^2 - 9 + 9^3 - 9^2 + 9^4 - 9^3 + ... + 9^{99} - 9^{98} \Rightarrow A = 9^{99}$. **13.** $(x^2 + x) + (y^2 + y) = 2^{x-y} + 3 \Leftrightarrow x(x + 1) + y(y + 1) = 2^{x-y} + 3$. Dar $x(x + 1)$ şi $y(y + 1)$ sunt numere pare. (Produsul a două numere naturale consecutive este un număr par). Cum 3 este număr impar $\Rightarrow 2^{x-y} = 1 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Înlocuim în ecuația dată $\Rightarrow 2x(x + 1) = 4 \mid : 2 \Rightarrow x(x + 1) = 2 \Rightarrow x = 1$ şi $y = 1$. **14.** Evident dacă $a = 0$ sau $b = 0$ sau $c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ cu $a \leq b \leq c \Rightarrow a + b + c = abc \Rightarrow abc \leq 3c \Leftrightarrow ab \leq 3 \Rightarrow a \cdot b \in \{1, 2, 3\}$. Dacă $a \cdot b = 1 \Rightarrow a = b = 1 \Rightarrow c \notin \mathbb{N}\mathbb{N}$. Dacă $a \cdot b = 2 \Rightarrow a = 1, b = 2$ sau $a = 2, b = 1$ şi $c = 3$. Dacă $a \cdot b = 3 \Rightarrow a = 1, b = 3$ sau $a = 3, b = 1$ şi $c = 2$. Deci $(a,b, c) \in \{(0, 0, 0); (1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (3, 2, 1)\}$. **15.** Evident $n > 0$. Dacă $n = 1$, $\dfrac{n}{7} \notin \mathbb{N}$ şi $n = 1$ nu verifică ecuația, atunci $\dfrac{n}{7} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{7, 14, 21, ..., 7k\}$. Dacă $n = 7 \Rightarrow 7^4 - 7^3 - 7^2 + 1 = 2010 \Leftrightarrow 2401 - 343 - 49 + 1 = 2010$ (A). Dacă $n = 14 \Rightarrow 14^4 - 14^3 - 14^2 + 2 = 2010 \Leftrightarrow 196 \cdot 181 + 2 = 2010 \Leftrightarrow 35476 = 2010$ (F). Deci $n = 7$. **16.** a) *Soluția I*: Scriem $8 = 9 - 1$; $(9 - 1) + 9 \cdot (9 - 1) + 9^2(9 - 1) + ... + 9^{2010}(9 - 1) = x^{2011} - 1 \Leftrightarrow 9 - 1 + 9^2 - 9 + 9^3 - 9^2 + ... + 9^{2011} - 9^{2010} = x^{2011} - 1 \Leftrightarrow 9^{2011} - 1 =$

$= x^{2011} - 1 \Leftrightarrow 9^{2011} = x^{2011} \Rightarrow x = 9.$

Soluția a II-a: Scoatem factor comun pe 8; $8(1 + 9 + 9^2 + ... + 9^{2010}) = x^{2011} - 1$. În paranteză avem suma puterilor consecutive ale bazei 9;

$$S = 1 + 9 + 9^2 + ... + 9^{2010} \mid \cdot 9$$

$$9S = 9 + 9^2 + 9^3 + ... + 9^{201} \quad -$$

$8S = 9^{2011} - 1 \Rightarrow S = \dfrac{9^{2011}-1}{8}$. Avem $8 \cdot \dfrac{9^{2011}-1}{8} = x^{2011} - 1 \Leftrightarrow 9^{2011} - 1 = x^{2011} - 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 9^{2011} = x^{2011} \Rightarrow x = 9$; b) Numărul A este $A = 9 + 99 + 999 + \underbrace{999...99}_{2011}$; $A = (10 - 1) + (10^2 - - 1) + (10^3 - 1) + ... + (10^{2011} - 1)$; $A = (10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{2011}) - 1 \cdot 2011 = \underbrace{1111....1}_{2010}0 - - 2011 = \underbrace{1111....1}_{2006}109099$. Suma cifrelor este $1 \cdot 2007 + 3 \cdot 9 = 2034$. **17.** Egalitatea dată este echivalentă cu: $\dfrac{5^n}{5^n} + \dfrac{1}{5^n} = \dfrac{30 \cdot 7^n}{30 \cdot 7^n} + \dfrac{7 \cdot 6^n}{30 \cdot 7^n} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{5^n} = 1 + \dfrac{7 \cdot 6^n}{30 \cdot 7^n} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5^n} = \dfrac{7 \cdot 6^n}{30 \cdot 7^n} \Leftrightarrow 30 \cdot 7^n = = 7 \cdot 30^n \Leftrightarrow \dfrac{30}{7} = \dfrac{30^n}{7^n} \Leftrightarrow \dfrac{30}{7} = \left(\dfrac{30}{7}\right)^n \Rightarrow n = 1$. **18.** Egalitatea dată este echivalentă cu: $\dfrac{5a}{4a+3} = \dfrac{b-1}{b}$, dar $\dfrac{b-1}{b} < 1 \Rightarrow \dfrac{5a}{4a+3} < 1 \Rightarrow a < 3 \Rightarrow a \in \{1, 2\}$. Dacă $a = 1 \Rightarrow \dfrac{5}{7} = \dfrac{b-1}{b} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5b = 7b - 7 \Leftrightarrow 2b = 7 \Rightarrow b \notin \mathbb{N}$. Dacă $a = 2 \Rightarrow \dfrac{10}{11} = \dfrac{b-1}{b} \Leftrightarrow 11b - 11 = 10b \Rightarrow b = 11 \in \mathbb{N}$. Deci $a = 2$ şi $b = 11$. **19.** Suma dată este un număr impar, rezultă că cei 6 termeni nu pot avea aceeaşi paritate. Deci cel puțin unul este par. fie p număr par şi prim $\Rightarrow p = 2 \Rightarrow 2 + 2^2 + 2^3 + + r + r^2 + r^3 = 2393 \Leftrightarrow r \cdot (1 + r + r^2) = 2393 - 14 \Leftrightarrow r \cdot (1 + r + r^2) = 2379 = 3 \cdot 13 \cdot 61$. Dacă $r = 3 \Rightarrow$ suma este mai mică decâr 2393. Dacă $r = 61 \Rightarrow$ suma este mai mare decât 2393. Dacă $r = 13 \Rightarrow$ suma $= 2 + 2^2 + 2^3 + 13 + 13^2 + 13^3 = 2393$. Deci $p = 2$ şi $r = 13$ sau $p = 13$ şi $r = 2$; **20.** Din $\dfrac{234}{y(z+1)} = \dfrac{y}{10} \Rightarrow y^2(z + 1) = 2340$. Dacă $y = 1 \Rightarrow z + 1 = 2340 \Rightarrow z = 2339$ şi $\dfrac{x-100}{1000} = \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow x - 100 = 100 \Rightarrow x = 200$. Dacă $y = 2 \Rightarrow \dfrac{234}{z+1} = \dfrac{4}{10} \Rightarrow z + 1 = \dfrac{2340}{4} \Rightarrow z = = 584$ şi $\dfrac{x-100}{1000} = \dfrac{2}{10} \Leftrightarrow x - 100 = 200 \Rightarrow x = 300$. Dacă $y = 3 \Rightarrow \dfrac{234}{z+1} = \dfrac{9}{10} \Rightarrow z + 1 = \dfrac{2340}{9}$ $\Rightarrow z + 1 = 260 \Rightarrow z = 259$ şi $\dfrac{x-100}{1000} = \dfrac{3}{10} \Rightarrow x - 100 = 300 \Rightarrow x = 400$. Dacă $y = 4 \Rightarrow \dfrac{234}{z+1} = = \dfrac{16}{10} \Rightarrow z+1 = \dfrac{2340}{16} \notin \mathbb{N}$. Dacă $y = 5 \Rightarrow \dfrac{234}{z+1} = \dfrac{15}{10} \Rightarrow z+1 = \dfrac{2340}{27} \notin \mathbb{N}$. Dacă $y = 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{234}{z+1} = \dfrac{36}{10} \Rightarrow z+1 = \dfrac{2340}{36} = 65 \Rightarrow z = 64$ şi $\dfrac{x-100}{1000} = \dfrac{6}{100} \Rightarrow x - 100 = 600 \Rightarrow x = 700$. Dacă $y = 7, 8$ nu avem soluții, $7 \nmid 234$ şi $8 \nmid 234$. Dacă $y = 9 \Rightarrow \dfrac{234}{z+1} = \dfrac{81}{10} \Rightarrow z+1 = \dfrac{2340}{81} \notin \notin \mathbb{N}$. Deci $(x, y, z) \in \{(200, 1, 2339); (300, 2, 584); (400, 3, 259); (700, 6, 64)\}$;

CUPRINS