Nicolae Grigore

MATEMATICĂ OLIMPIADE ȘI CONCURSURI ȘCOLARE

Clasa a V-a

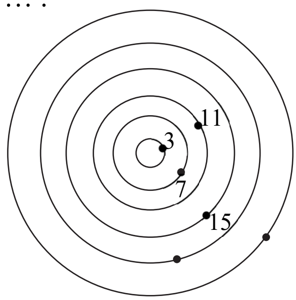
Probleme selectate pe unități de învățare
cu rezolvări complete

Editura NOMINA

b) Arătați că între numerele A și B nu se găsește pătratul nici unui număr natural.

Etapa locală, Hunedoara, 2015

39. Pe cercurile din figură sunt așezate numerele 3, 7, 11, 15, … .



a) Scrieți numerele ce urmează a fi așezate pe următoarele două cercuri.

b) Să se determine numărul ce trebuie așezat pe al 2015-lea cerc.

c) Să se arate că numărul de pe cercul al 2015-lea, nu este pătrat perfect.

d) Să se calculeze suma numerelor de pe primele 2015 cercuri.

Etapa locală, Mureș, 2015

40. Se dau numerele:

$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1) + n$ și $S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - (n - 1) + n$,

unde n este un număr natural impar.

a) Să se determine numărul n, știind că $S_1 = 2015 \cdot S2$.

b) Care este cel mai mic număr natural nenul cu care trebuie înmulțit $S_1 + S_2$, astfel încât să se obțină un pătrat perfect?

c) Aflați numerele naturale n și m, cu n impar, astfel încât $S_1 - S_2 = 2^m$.

Etapa locală, Botoșani, 2015

41. Fie suma $S = 101 + 1001 + 10001 + \dots + 1\underbrace{00...00}_{2015 \text{ cifre}}1$.

a) Aflați câte cifre are termenul din mijloc al sumei.

b) Aflați câte cifre de 0 se folosesc pentru a scrie toți termenii sumei.

c) Calculați suma.

Etapa locală, Neamț, 2015

42. Se consideră șirul de numere: 3, 7, 11, 15, 19, ….

a) Explicați regula de formare a termenilor șirului și aflați următorii trei termeni.

b) Stabiliți dacă numărul 2015 este termen al șirului.

c) Calculați suma primilor 100 de termeni ai șirului.

Etapa locală, Vaslui, 2015

43. Fie numărul natural $\overline{11...1} + \overline{22...2} + ... + \overline{99...9}$, fiecare număr de forma $\overline{aa...a}$ conținând 2015 cifre de a. Determinați câte cifre de 9 conține numărul n.

Etapa locală, Arad, 2016

44. Scrieți numărul $S = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 100 \cdot 101) - 5050$ ca o sumă de pătrate de numere naturale.

Etapa locală, Argeș, 2016

45. Să se arate că nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = 2^{2017} + 2016$.

Etapa locală, Vaslui, 2017

46. a) Să se arate că $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2022} < 2^{2023}$.

b) Să se scrie numărul 2023^{2024} ca o sumă de 2023 de numere naturale consecutive.

Etapa locală, Galaț, 2023

4. Teorema împărțirii cu rest

1. Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $13n + 8$ dă restul 13 la împărțirea cu 80, iar $8n + 5$ dă restul 5 la împărțirea cu 50. Determinați ultimele două cifre ale lui n.

Etapa locală, Brăila, 2008, prof. Nicolae Stănică

2. Împărțind numărul natural a la numărul natural b, obținem câtul 5 și restul 33.

a) Aflați numerele a și b, știind că $2a + b = 440$.

b) Arătați că $4a - 20b - 68$ este pătrat perfect și cub perfect.

Etapa locală, Constanța, 2008

3. a) Aflați câte numere naturale de trei cifre dau prin împărțirea la 19 restul egal cu câtul.

b) Aflați numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$, care împărțite la $\overline{bc}$ dau restul a și câtul 5.

Etapa locală, Olt, 2008

4. Suma a două numere naturale este 128. Împărțind numărul mai mare la numărul mai mic, se obține câtul și restul numere naturale consecutive, iar suma dintre cât și rest este egală cu împărțitorul. Aflați cele două numere.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2009, prof. Daniel și Elisabeta Stanciu

5. Suma a 10 numere naturale este 2009. Împărțind fiecare dintre aceste numere la numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$ se obțin numai resturi egale cu 2 sau 3. Suma tuturor resturilor este egală cu 28.

a) Câte resturi din cele 10, sunt egale cu 2?

b) Determinați cel mai mic număr natural n care satisface condițiile din enunț.

Etapa locală, Constanța, 2009

6. Să se afle restul împărțirii numărului 5^{7^n} prin 31, $n \in \mathbb{N}$.

Etapa locală, Galați, 2009, prof. Cornel Haihui

7. Suma a patru numere naturale este 626. Împărțindu-le prin același număr natural, se obțin câturile numere naturale consecutive și resturile 1, 2, 3 respectiv 4. Aflați numerele. Câte soluții are problema?

Etapa locală, Prahova, 2009, prof. Maria și Anton Negrilă

75. Numărul $10^{2016} - 2014$ este pătrat perfect? Justificați răspunsul.

Etapa locală, Harghita, 2016

76. Se consideră numărul N = a + 3 + 15 + b + 35, unde cei cinci termeni ai sumei sunt scriși în ordine crescătoare. Determinați a și b pentru care N este pătrat perfect.

Etapa locală, Sălaj, 2016, G.M.

77. Se dau numerele $a = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2016$ și $b = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2015}$. Dacă x = = a + 1009 și y = b + 2, demonstrați că $x \cdot y$ este pătrat perfect.

Etapa locală, Mureș, 2016

78. a) Calculați $1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2$.

b) Arătați că numărul 2015^{2015} poate fi scris ca o sumă de 6 pătrate perfecte.

Etapa locală, Brașov, 2016, Supliment G.M.

79. Să se arate că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte: $a = 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}$, și $b = 5^{34} + 5^{17}$.

Etapa locală, Vaslui, 2016

80. a) Scrieți numărul 2016 ca sumă de trei pătrate perfecte.

b) Arătați că numărul 2016^{2015} poate fi scris ca suma a trei pătrate perfecte nenule.

Etapa locală, Alba, 2016

81. Determinați numerele $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ba} + \overline{ab}$ și $\overline{ba} - \overline{ab}$ sunt pătrate perfecte.

Etapa locală, Arad, 2016

82. Dacă un număr natural îndeplinește simultan condițiile:

1) nu conține cifre egale;

2) prima și ultima cifră este număr prim sau pătrat perfect;

3) numărul format din oricare două cifre consecutive este un număr prim sau pătrat perfect, atunci o să numim numărul *olimpic*.

De exemplu, numerele 79 (7, 79 sunt numere prime, $9 = 3^2$), 413 ($4 = 2^2$, 41, 13 și 3 sunt numere prime), 2531 (2 număr prim, $25 = 5^2$, 53 și 31 sunt numere prime și 1 este pătrat perfect), 37164 (3, 7, 37, 71 sunt numere prime, 16, 64, 4 sunt pătrate perfecte) se numesc *olimpice*.

a) Găsiți cel mai mic număr *olimpic* de două cifre.

b) Găsiți cel mai mare număr *olimpic* de cinci cifre.

Etapa locală, Călărași, 2016, prof. Gheorghe Stoianovici

83. Determinați numerele de forma $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

a) suma pătratelor cifrelor este divizibilă cu 4;

b) restul împărțirii numărului $\overline{abcd}$ la c este 7.

Etapa județeană, 2018

84. Să se demonstreze că numărul $a = 9 \cdot \left(\underbrace{111...11}_{2018\text{ cifre}}\underbrace{222...22}_{2019\text{ cifre}}\right)$ este pătrat perfect.

Etapa locală, Galați, 2019

85. Determinați numerele de trei cifre $\overline{abc}$ al căror pătrat are cifra sutelor a, cifra zecilor b și cifra unităților c.

Etapa națională, Hunedoara, 2019

86. Fie numărul $x = p^{2024} + q^{2024} + 2023 + 2^{2022}$, cu $p, q \geq 2$. Să se arate că numerele 5x și 5x – 5 nu pot fi pătrate perfecte.

Etapa locală, Galați, 2023

87. a) Stabiliți dacă numărul n este pătrat perfect, unde $n = [(3^8)^2 \cdot (3^2)^7 + 25^{25} : 5^6 -$ $- (7^{16})^2] : \left[(9^5)^3 + (5^2)^{22} + \left(7^{4^2}\right)^2\right]$.

b) Arătați că diferența dintre jumătatea lui 8^{48} și sfertul lui 4^{71} se împarte exact la 14.

Etapa locală, Giurgiu, 2023

88. Aflați numerele naturale nenule n pentru care $2^{2n-1} \cdot 5^n + 56$ este pătrat perfect.

Etapa locală, Brăila, 2023, prof. Carmen și Viorel Botea

89. Fie $a = 32^5 \cdot 2^{16} - 12^{30} : 9^{15} - 4^{25} \cdot 8^3$ și $b = 3^{39} + 12^{39} : 2^{78} + 27^{13}$.

a) Arătați că numai unul dintre numerele a și b este pătrat perfect.

b) Demonstrați că $a < b$.

Etapa locală, Vrancea, 2023

90. Fie $A = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2022$ și $B = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2023$. Arătați că nu există niciun pătrat perfect între A și B.

Etapa locală, Vrancea, 2023, G.M.

91. Se consideră numărul $N = 15^{2k} - 3^{2k+2} \cdot 5^{2k-2}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că N este pătrat perfect.

Etapa locală, Tulcea, 2023

92. Scrieți numărul 2023^{2023} ca o sumă de patru pătrate perfecte nenule.

Etapa locală, Tulcea, 2023

7. Divizibilitatea numerelor naturale

1. Demonstrați că:

a) $86 \mid 9^{n+2} + 5 \cdot 9^n$; $\quad 258 \mid 9^{n+2} + 5 \cdot 9^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $27 \mid 2^n + 3 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 2^{n+2}$; $\quad 54 \mid 2^n + 3 \cdot 2^{n+1} + 5 \cdot 2^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Arătați că printre 7 numere naturale pătrate perfecte există două a căror diferență este divizibilă cu 10.

b) Arătați că printre 5 numere naturale pătrate perfecte, există două a căror diferență sau sumă este divizibilă cu 10.

Etapa județeană, Botoșani, 2008

— Atunci te rog să faci următoarele calcule: adună 2 la ziua nașterii și înmulțește rezultatul cu 2. Adaugă 5 la rezultat și apoi înmulțește cu 5. La rezultatul obținut adaugă luna nașterii. Cât ți-a dat?

— 335.

— Ești născut în prima jumătate (primele șase luni) sau în a doua jumătate (ultimele șase luni) ale anului?

— În a doua jumătate.

— Te-ai născut pe 28 octombrie.

— Cum a raționat Ștefan?

Etapa locală, Dolj, 2017

66. Să se scrie numărul 2017^2 ca sumă a 2017 numere naturale consecutive.

Etapa locală, Arad, 2017

67. Ștefan va împlini x ani în anul x^2. Care este anul de naștere al lui Ștefan, dacă se știe că s-a născut în secolul XX?

Etapa locală, Arad, 2017

68. În șase coșuri sunt respective 5, 6, 12, 14, 23 și 29 de fructe, în unele fiind nu mai mere, iar în altele numai pere. Renunțând la un coș, rămân de două ori mai multe mere decât pere. La ce coș trebuie renunțat?

Etapa locală, Timiș, 2017

69. Cei 30 de elevi ai unei clase practică cel puțin unul dintre sporturile: fotbal, tenis și înot. Se știe că 18 elevi joacă fotbal, 7 practică înot și fotbal, 4 joacă doar tenis, 6 practică și tenis și înot. Dacă cei care practică doar înotul sunt de două ori mai mulți decât cei care practică fotbalul și înot, dar nu tenis, aflați câți practică toate cele trei sporturi.

Etapa locală, Vâlcea, 2017

70. Determinați numerele naturale nenule a, b, c, pentru care $\frac{a+b}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{7c+1}{c+1}$.

Etapa națională, Negrești Oaș, 2018

71. Determinați numărul perechilor (x, y) de numere naturale care verifică relația $35x + 28y = 1421$.

Etapa locală, Brăila, 2023, prof. Mihaela Giurcă și Nicoleta Dincă

72. Determinați numerele naturale de forma $\overline{aaa}$ care se descompun în câte o sumă de 21 de numere consecutive, precum și descompunerile respective.

Etapa locală, Mehedinți, 2023

73. Într-o clasă sunt mai mult de 20 de elevi și mai puțin de 30. Vârsta de 10 ani și alții de 11 ani. Câți elevi sunt în clasă, dacă suma vârstelor este 259 ani, iar Numărul elevilor de 10 ani este mai mic decât numărul elevilor de 11 ani?

Etapa locală, Vrancea, 2023

10. Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică. Probleme de numărare, paritate. Invarianți. Probleme de logică și perspicacitate. Careu magic și supermagic

1. Metoda grafică (figurativă)

1. Suma dintre dublul primului număr și triplul celui de-al doilea este 2488. Împărțind primul număr la sfertul celui de-al doilea, obținem câtul 3 și restul 2. Aflați cele două numere.

Etapa locală, Argeș, 2008

2. a) Diferența a două numere este 3. Aflați numerele, știind că unul dintre ele este cu 11 mai mic decât triplul celuilalt.

b) Determinați numerele a, b, c, știind că $5a + 3b = 57$, $a \cdot c = 72$, iar $b \cdot c = 108$.

Etapa locală, Bacău, 2009

3. Dublul unui număr este egal cu triplul altui număr, iar diferența lor este 16. Aflați numerele.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2009, prof. Valter Pop

4. În două cutii sunt la un loc 820 creioane. Dacă din prima cutie s-ar fi luat 41 creioane și s-ar pune în a doua cutie, atunci în prima ar fi de trei ori mai multe creioane decât în a doua. Câte creioane sunt în fiecare cutie?

Etapa locală, Harghita, 2010, prof. Nicolae Baciu

5. Suma a două numere naturale este 2009, iar dacă împărțim numărul mare la sfertul numărului mic, obținem câtul și restul egale cu 7. Aflați numerele.

Etapa locală, Maramureș, 2009, prof. Nadina Neaga

6. Într-o familie sunt trei copii: Alexandru, Ionel și Cristina. Alexandru este cu un an mai mic decât Ionel, iar Ionel este cu 2 ani mai mare decât Cristina. Ce vârstă are în prezent fiecare copil, dacă acum un an suma vârstelor lor a fost de 12 ani?

Etapa locală, Bihor, 2010

2. Metoda comparației

1. Două eleve au cumpărat portocale și kiwi. O elevă, pentru 5 kg de portocale și 4 kg de kiwi, a plătit 140 lei, iar a doua elevă, pentru 7 kg de portocale și 2 kg de kiwi, a plătit 106 lei. Cât costă 1 kg de portocale și 5 kg de kiwi?

Etapa locală, Cluj, 2009, prof. Ioan Todea

b) Arătați că numărul $\frac{a}{n+1} \notin \mathbb{N}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Etapa județeană, Satu-Mare, prof. Nicolae Baciu

30. Fie numerele:

$$a = 2n + 3;\ b = 3n + 4;\ c = 4n + 9;\ n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Aflați câtul și restul împărțirii lui c la a.

b) Arătați că $(a + c) \cdot (c - a)$ se divide cu 24.

c) Arătați că fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

d) Există numere naturale n, pentru care $\frac{c}{b} \in \mathbb{N}$? Justificați răspunsul.

Etapa județeană, Brașov, prof. Dorina Bocu

31. Calculați:

a) $a = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2010 + 2011$;

b) $b = x + y + z$, unde $x = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{3}{12} + \ldots + \frac{2010}{6033} + \frac{2011}{6036}$;

$y = \frac{2}{6} + \frac{3}{9} + \frac{4}{12} + \ldots + \frac{2011}{6033} + \frac{2012}{6036}$; $z = \frac{3}{6} + \frac{4}{9} + \frac{5}{12} + \ldots + \frac{2012}{6033} + \frac{2013}{6036}$.

c) Aflați câtul și restul împărțirii lui $a + b + 1007$ la 2011.

Etapa locală, Tulcea, 2012

32. Aflați cifra x astfel încât următoarea fracție $\frac{\overline{x1} + \overline{4x}}{96}$ să fie echiunitară.

Etapa locală, Covasna, 2012

33. Cinci frați au împreună 79 de ani. Vârsta primului este $\frac{1}{7}$ din vârsta ultimului, iar $\frac{1}{2}$ din vârsta celui de-al doilea este $\frac{1}{4}$ din vârsta ultimului. Dacă mărim cu 17 ani vârsta primului, atunci media aritmetică a vârstelor primilor trei frați este egală cu vârsta celui de-al patrulea, iar dublul vârstei acestuia întrece cu 6 ani vârsta ultimului. Aflați vârstele celor cinci frați.

Etapa locală, Dâmbovița, 2012, prof. Cristian Grecu

34. Aflați numerele naturale a, b, c, știind că $a + b : 2 + c : 2 = 45$, $a : 2 + b + c : 2 = 48$ și $a : 2 + b : 2 + c = 51$.

Etapa locală, Timiș, 2016

2. Fracții zecimale

1. a) Fie fracția $F = \dfrac{2008 \cdot 4016 + 2009 \cdot 4018 + 2010 \cdot 4020 + 2011 \cdot 4022}{6024 \cdot 4016 + 6027 \cdot 4018 + 6030 \cdot 4020 + 6033 \cdot 4022}$.

Arătați că F este un număr zecimal periodic simplu.

b) Fie $a = \dfrac{2009 \cdot 4018 + 2010 \cdot 4020 + 2011 \cdot 4022}{6027 \cdot 10045 + 6030 \cdot 10050 + 6033 \cdot 10055}$. Arătați că numărul a este o fracție zecimală periodică mixtă.

Nicolae Grigore

2. Dan și Ana au la dispoziție cifrele 1, 3, 5, 7, 9 și o virgulă, confecționate din material plastic. Ei își propun să joace un joc după următoarea regulă: Dan așază cele cinci cifre una după alta, iar apoi Ana așază virgula, obligatoriu între două cifre.

a) Care este cel mai mic și cel mai mare număr pe care ei îl pot obține?

b) Dacă deja format numărul 3,5917, să se afle suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr pe care ei îl pot obține prin eliminarea unei singure cifre după virgulă.

c) Câte numere distincte pot forma cei doi copii?

Etapa județeană, Bacău, 2009, prof. Ovidiu Trofin

3. Determinați a, n $\in \mathbb{N}^*$, știind că $\dfrac{12n + 9}{5} = \overline{a,a}$.

Etapa județeană, Vaslui, 2009

4. Se adună toate fracțiile periodice de forma $\overline{0,abc}$, unde $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$. Determinați a 2009-a cifră de după virgulă a sumei obținute.

Etapa județeană, Vâlcea, 2009, prof. Mircea Fianu

5. Demonstrați că $0{,}003 < \dfrac{\overline{a,(bc)} + \overline{b,(ca)} + \overline{c,(ab)}}{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}} < 0,(03)$, unde $a \neq b \neq c \neq 0$.

Etapa județeană, Prahova, 2009, prof. Dragoș Moldoveanu

6. Determinați fracția zecimală 0,70(abcd), știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) a 2007-a zecimală este un număr prim par;

ii) a 2008-a zecimală este un multiplu al oricărui număr natural;

iii) a 2010-a zecimală este cel mai mare pătrat perfect de o cifră;

iv) suma cifrelor din perioadă este divizibilă cu 11.

Etapa județeană, Suceava, 2009

7. a) Arătați că numărul 0,16 · 6,25 este natural.

b) Arătați că există numere naturale a și b și cifrele c_1, c_2, ...c_{10}, d_1, d_2, d_3, ..., d_{10} cu $c_{10} \neq 0$ și $d_{10} \neq 0$, astfel încât numărul $(a + \overline{0,c_1c_2...c_{10}}) \cdot (b + \overline{0,d_1d_2...d_{10}})$ să fie natural.

Etapa națională, Călărași, 2010, prof. Mihai Bălăună

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa I, Brașov, 20 februarie 2021

Timp de lucru: 120 de minute
Fiecare problema se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corecta de răspuns. O singură varianta este corectă.

1. Câte numere naturale de 3 cifre de forma $\overline{abc}$ satisfac egalitatea $\overline{abc} - \overline{cba} = 297$?
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. alt răspuns

2. Se dau numerele $a = [(15^2 - 11^2) : 8 - 1^{2021}] : 2 - 2021^0$ și $b = [(4^3 - 2^6 : 2) : 4 - 6]^2$. Calculând a^b obținem:
A. 5 B. 20 C. 125 D. 625 E. alt răspuns

3. Andrei a cumpărat 2 gume de șters, 6 creioane, 4 caiete de matematică și 2 caiete dictando, plătind 20 de lei. Prietenul lui a cumpărat 3 gume de șters, 9 creioane, 6 caiete de matematica și 3 caiete dictando. Câți lei a plătit prietenul lui Andrei?
A. 10 B. 30 C. 60 D. 25 E. alt răspuns

4. Din jumătatea triplului celui mai mare număr par format din 3 cifre distincte, scădeți triplul dublului celui mai mic număr format din 3 cifre pare distincte. Ce număr se obține?
A. 72 B. 155 C. 255 D. 885 E. alt răspuns

5. Un elev are de rezolvat un anumit număr de probleme. Își propune să rezolve câte 10 probleme pe zi, într-un anumit număr de zile. Dar problemele i se par simple și rezolvă cate 15 probleme pe zi, terminând astfel cu 4 zile mai devreme decât îți propusese. Câte probleme a avut de rezolvat elevul?
A. 12 B. 120 C. 100 D. 15 E. alt răspuns

6. Într-o familie, tatăl are cu 5 ani mai puțin decât mama și fiul lor la un loc. Peste 7 ani, fiul va avea a treia parte din vârsta mamei, iar toți membrii familiei vor avea împreună 108 ani. Diferența dintre vârsta tatălui și vârsta fiului, în prezent, este:
A. 87 B. 49 C. 41 D. 33 E. alt răspuns

7. Două numere naturale împărțite dau câtul 57, iar restul este strict mai mare decât 5 și cu 406 mai mic decât suma dintre deîmpărțit și împărțitor. Suma celor doua numere naturale este:
A. 405 B. 406 C. 410 D. 412 E. alt răspuns

Problemele 8 și 9 se referă la următorul enunț:

Fie numărul $N = \overline{12345678910111213...2021}$, obținut prin scrierea alăturată a numerelor naturale mai mici sau egale decât 2021, în ordine crescătoare.

8. Numărul cifrelor numărului N este:
A. 6948 B. 6957 C. 6968 D. 6974 E. alt răspuns

9. A 170-a cifră a lui N este:
A. 9 B. 7 C. 8 D. 6 E. alt răspuns

10. Câte triplete de numere naturale (x, y, z) pentru care $5^x + y^4 = 2 \cdot 3^{2z}$ există?
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. alt răspuns

11. Suma soluțiilor naturale ale inecuației $(x + 17) : 3 - 2 \cdot 4 \leq 20$ este:
A. 2211 B. 2278 C. 4556 D. 4422 E. alt răspuns

12. Știind că $5b + 4ab + 3bc = 120$ și $4a + 3c = 15$, numărul b este egal cu:
A. 8 B. 6 C. 60 D. 12 E. alt răspuns

13. Ultima cifră a numărului $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2020}$ este:
A. 0 B. 1 C. 2 D. 5 E. alt răspuns

14. Fie $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 100$. Restul împărțirii lui $A + 1978$ la 2021 este:
A. 43 B. 147 C. 1978 D. 0 E. alt răspuns

15. Dacă a și b sunt două numere naturale pentru care $a^3 + b^3 = 35^{2020}$, atunci suma numerelor a și b este:
A. 5 B. $3 \cdot 35^{673}$ C. $5 \cdot 3^{673}$ D. $5 \cdot 35^{2019}$ E. alt răspuns

16. Numărul $A = (2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot ... \cdot 2^{2020}) : (2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot ... \cdot 2^{2019})$ este pătratul numărului natural:
A. 2020 B. 2^{2020} C. 2^{1010} D. 2^{505} E. alt răspuns

17. Ultimele doua cifre ale numărului $2^{4n} + 2^{4n+2}$, unde n este un număr natural nenul, sunt:
A. 80 B. 90 C. 20 D. 50 E. alt răspuns

18. Restul împărțirii numărului $\overline{201\underbrace{99..9}_{2020 \text{ cifre}}}$ la 101 este:
A. 0 B. 1 C. 9 D. 99 E. alt răspuns

19. Câte cifre are numărul $2^{2020} \cdot 5^{1920}$?
A. 1950 B. 1951 C. 2000 D. 2020 E. alt răspuns

20. Pentru numerele naturale $a = 2^{2021}$ și $b = 3^{1212}$ are loc inegalitatea:
A. $a < b$ B. $a > 2b$ C. $2a < b$ D. $a^2 < b$ E. alt răspuns

SOLUȚII

I. Mulțimea numerelor naturale. Operații în N. Factorul comun

1. Puteri naturale

1. a) $x = 1$, $y = 3$, $x + y = 4 = 2^2$ este pătrat perfect; b) $x^y = 1^3 = 1$, $y^x = 3^1 = 3$. **2.** $a = 2^{98}(1 + 2) \cdot 5^{98}(5 + 5^2) = (2 \cdot 5)^{98} \cdot 3 \cdot 30 = = 10^{98} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10 = 9 \cdot 10^{99}$; $b = 2^{99}(1 + 2^2) \cdot 5^{98}(5 + 5^4) = 2^{99} \cdot 5^{98} \cdot 5 \cdot 630 = 10^{99} \cdot 630 \Rightarrow a < b$. **3.** a) $x = 2^{1651} \cdot (4 - 2 - 1) = 2^{1651}$, $y = 3^{992}(3 - 2) - 2 \cdot 3^{991} - 3^{990} = 3^{991} - 3^{990} = 2 \cdot 3^{990}$; $x = 2 \cdot 2^{1650} = 2 \cdot (2^5)^{330} = 2 \cdot 32^{330}$ (1); $y = 2 \cdot (3^3)^{330} = 2 \cdot 27^{330}$ (2); $z = 2 \cdot (7^2)^{330} = 2 \cdot 49^{330}$, (3). Din (1), (2), (3) rezultă că $y < x < z$; b) $A = \{2^{100} : (2^5 \cdot 2^{188} : 2^{187} + 0)^6\}^{14} = 2^{100} : 2^{84} = 2^{16} = (2^4)^4 = 16^4$; c) $\overline{ab} - \overline{ba} = 18 \Rightarrow 9(a - b) = 18 \Rightarrow a - b = 2$ și $\overline{cb}$ cel mai mic $\Rightarrow \overline{ab} = 31$; $17^{14} > 16^{14} = 2^{56} > 2^{55} = (2^5)^{11} > 31^{11}$. **4.** a) 70; b) 1. **5.** $N = (2^3)^{666} + (1 + 2^{100} + 3^{102}) : (1 + 2^{100} + + 3^{102}) - 2^{1998} = 2^{1998} + 1 - 2^{198} = 1$; $x = 1995(1996 - 1994) - 2 \cdot 1994 = = 2(1995 - 1994) = 2$; $S = .\underbrace{(3-2)+(5-4)+(7-6)+...+(2009-2008)}_{1004\,\text{ori}} = 1004$.. **6.** a) $n = 10 \Rightarrow A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 10 = 10! = 518400$, cifra miilor este 8; b) $1000 \mid A \Rightarrow$ ultimele trei cifre sunt zerouri $\Rightarrow A = n!$ are ca factor pe $10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ iar factorul 5 apare câte o singură dată la 5, 10 și 15 $\Rightarrow n = 15$ cel mai mic; c) Cum A se termină cu trei zerouri, el nu poate fi pătrat perfect. **7.** $a = (2^{105} \cdot 5^{75} - 5^{75} \cdot 2^{105} + 3^{63})^2 = 3^{126} = (3^3)^{42} = 27^{42}$ (1); $b = [7^{42} \cdot (343 - 254 - 97) : 1]^2 = = (7^{42})^2 = (7^2)^{42} = 49^{42}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow a < b$. **8.** a) $14^2(729 - 329) - 400 = 400(14^2 - 1) = = 78000$; b) $(3^{17} + 2^{95} - 5^{11}) : (3^{17} + 2^{95} - 5^{11}) = 1$; c) $(1 + 2 - 3) + (4 + 5 - 6) + (7 + 8 - 9) + (10 + 11 - 12) + ... + (2005 + 206 - 2007) + 2008 = (3 + 6 + 9 + ... + 2004) + 2008 = 3(1 + 2 + 3 + ... + 668) + 2008 = 3 \cdot 334 \cdot 669 + 2008 = 672346$. **9.** a) Conține factorul $20^3 - 20^3 = 0$. Deci produsul este 0; $.\,2008^{2008^0} - 0 = 2008$.; b) $1004^2 \cdot 2^2 \cdot 250 - 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 1004^2 - 2^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 502^2 = 1004^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 - 1004^2 \cdot 5^2 \cdot 2^3 - 1004^8 \cdot 2^5 \cdot 5^2 = 1004^2 \cdot 2^3 \cdot 5^2 \cdot (5 - 1 - 2^2) = 0$. **10.** a) Pentru $n < 5$, $U(5) = U(1 + 2 + 6 + 4) = 3$. Pentru $n \geq 5$, $U(n!) = 0$, deci $U(S) = 3$. Propoziția este adevărată; b) $1 + 3 + 5 + ... + 2007 < 2(1 + 2 + 3 + ... + 1004) \Leftrightarrow 1004^2 < 1004 \cdot 1005$ (A). **11.** $a = 2^{2008} - 2^{2007} - 2^{2006} - 2^{2005} - 2^{2004} - 2^{2003} - ... - 2 - 1$; $2^{2008} - 2^{2007} = = 2^{2007}(2 - 1) = 2^{2007}$; $2^{2007} - 2^{2006} = 2^{2006}(2 - 1) = 2^{2006}$; .... ; $2^3 - 2^2 = 2^2(2 - 1) = 2^2$; $2^2 - 2 = 2$; $a = 2 - 1 = 1$; $2008^n - 1^{2008} = 2007^1 \Rightarrow 2008^n = 2008 \Rightarrow n = 1$. **12.** $\overline{abc}^{\overline{abc}} = 2^{\overline{abc}} \Rightarrow \overline{abc} = m_2$ și mai mult o putere a lui 2 număr de trei cifre; $\overline{abc} \in \{2^7, 2^8, 2^9\} = \{128, 256, 502\}$. Avem $128^{128} = (2^7)^{2^7} = 2^{896} \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 8, d = 9$ și $e = 6$; $256^{256} = (2^8)^{256} = 2^{2048} > 2^{\overline{cde}}$. Deci $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 8, 9, 6)$. **13.** Din $a = 2^{2009}(2^2 - 2 - 1) = 2^{2009} = (2^7)^{287} = 128^{287}$ și $b = = 5^{861}(5 - 4) = 5^{861} = (5^3)^{287} = 125^{287} \Rightarrow a > b$. **14.** $2 + 2 \cdot 3(1 + 2 + 3 + ... + 670) : 671 + 2^{2010} - 2 - 2^{2010} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{670 \cdot 671}{2} : 671 = 2010$. **15.** Din $a = 2^{2008} \cdot (2^2 - 2 - 1) = 2^{2008} = (2^8)^{251} = = 256^{251}$ și $b = 3^{1255} \cdot (3 - 2) = 3^{1255} = (3^5)^{251} = 243^{251} \Rightarrow a > b$. **16.** a) $(9 + 8 + 10^3 : 10^2) : 27 = 1$;

b) $3^{303} : (3^{300} + 3^{300} + 3^{300}) = 3^{303} : 3^{301} = 3^2 = 9$. **17.** a) $c \cdot (a + b) = b(a + b) \Leftrightarrow 2010c = 2010b$; b) $2a + b + b = 2(a + b) = 2 \cdot 2010 = 4020$; c) $b = c \Rightarrow$ factorul $b^2 - c^2 = 0$, deci produsul $(a^2 + a \cdot b + b^2)(b^2 - c^2) \cdot (c^2 + a^2) = 0$. **18.** Din $A = 2^n \cdot 3^{n+1} \cdot (1 + 2^2 + 2^2 \cdot 3) = 17 \cdot 2^n \cdot 3^{n+1}$ și $B = 5^n \cdot 7^{n+1} \cdot (5^2 - 1 - 7) = 17 \cdot 5^n \cdot 7^{n+1} \Rightarrow A < B$.

19.
$$\begin{array}{l} S_1 = 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{2010} \mid \cdot 3 \\ 3S_1 = 3^3 + 3^4 + 3^5 + ... + 3^{2010} + 3^{2011} \quad - \\ 2S_1 = 3^{2011} - 3^2 \Rightarrow S_1 = \dfrac{3^{2011} - 3^2}{2} \end{array} ; \quad \begin{array}{l} S_2 = 1 + 3^7 + 3^{14} + ... + 3^{2002} \mid \cdot 3^7 \\ 3^7 \cdot S_2 = 3^7 + 3^{14} + 3^{21} + ... + 3^{2009} \quad - \\ (3^7 - 1)S_2 = 3^{2009} - 1 \Rightarrow S_2 = \dfrac{3^{2009} - 1}{3^7 - 1}. \end{array}$$

Avem $\dfrac{3^{2011} - 3^2}{2} = a \cdot b^2 \cdot \dfrac{3^{2009} - 1}{3^7 - 1} \Big| : 3^{2009} - 1 \Rightarrow \dfrac{9}{2} = \dfrac{a \cdot b^2}{3^7 - 1} \Rightarrow a \cdot b^2 = \dfrac{9(3^7 - 1)}{2} = 9 \cdot 1093 = 1093 \cdot 3^2$. Cum 1093 este număr prim $\Rightarrow a = 1093$ și $b = 3$. Atunci $a + b^6 + 2b^4 + b^3 - b^0 = 2010 \Leftrightarrow 1093 + 729 + 162 + 27 - 1 = 2010$ (A). **20.** Din $a = (2^{15} + 5^6 - 7^{15}) : (2^{15} - 7^{15} + 5^6) \cdot 3^{26} = 3^{26} = (3^2)^{13} = 9^{13}$ și $b = 2^{101} : (2^{98} + 2^{98} + 2^{99}) \cdot 2^{38} = 2^{101} : 2^{100} \cdot 2^{38} = 2^{39} = (2^3)^{13} = 8^{13} \Rightarrow a > b$. **21.** Din $a = 2^{990} \cdot (2^{2010} - 2^{2009}) \cdot 2 = 2^{990} \cdot 2^{2009} \cdot 2 = 2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$ și $b = 3^{3000} : (3^{1002} - 3^{1000}) : 8 = 3^{3000} : 3^{1000} \cdot 8 : 4 = 3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000} \Rightarrow a < b$. **22.** $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2008} + 2^{2009} \mid \cdot 2$, (1); $2a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{2009} + 2^{2010}$, (2). Se scad relațiile (1) și (2) $\Rightarrow a = 2^{2010} - 1 \Rightarrow a + 1 = 2^{2010}$; $b = 4 \cdot 3^{1333} - 4 \cdot 3^{1332} + 4 \cdot 3^{1331} - 4 \cdot 3^{1330} + ... + 4 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 4$ scriem $4 = 3 - 1$; $b = (3 + 1) \cdot 3^{1333} - (3 + 1) \cdot 3^{1332} + (3 + 1) \cdot 3^{1331} + ... + (3 + 1) \cdot 3^3 - (3 + 1) \cdot 3^2 + (3 + 1) \cdot 3 - (3 + 1) \Rightarrow b = 3^{1334} + 3^{1333} - 3^{1333} - 3^{1332} + 3^{1332} + 3^{1331} + ... + 3^4 + 3^3 - 3^2 + 3^2 + 3 - 3 - 1 \Rightarrow b = 3^{1334} - 1 \Rightarrow b + 1 = 3^{1334}$; avem $a + 1 = 2^{2010} < (2^3)^{667} = 8^{667} < (3^2)^{667} = 9^{667} = 3^{1334} = b + 1 \Rightarrow a + 1 < b + 1$. **23.** $a = (5^3)^{13} + (3^5)^{13} = 125^{13} + 243^{13}$ și $b = 2^{91} + 2^{104} = (2^7)^{13} + (2^8)^{13} = 128^{13} + 256^{13}$. Dar $125^{13} < 128^{13}$; $243^{13} < 256^{13}$. Dacă se adună aceste ultime două relații, se obține $a < b$. **24.** a) La unități cifra 5 se folosește pentru scrierea numerelor mai mici decât 100, de 10 ori, iar la zeci de 9 ori. Deci cifra 5 se folosește pentru scrierea numerelor mai mici decât 100 de $10 + 9 = 19$ ori; b) Din $a = 160^{552} = (160^3)^{184} = (4096000)^{184}$ și $b = 2009^{368} = (2009^2)^{184} = (4036081)^{184} \Rightarrow a > b$ sau, comparăm numerele 160^3 cu 2009^2; $160^3 > 28^3 = (2^7)^3 = 2^{21} = 8^7 > 7 \cdot 7^7 = 7^8 = (7^4)^2 > 2009^2 \Rightarrow a > b$. **25.** Peștele uriaș înghite $7 + 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 = 259$ pești sau: 7 pești mari vor înghiți $7 \cdot 6 = 42$ pești mijlocii; 42 pești mijlocii vor înghiți $42 \cdot 5 = 210$ pești mici. Peștele uriaș înghite $210 + 42 + 7 = 259$ pești. **26.** a) $S = 1 + 2 + 3 + ... + 2011 = 2011 \cdot 1006 = 2023066$; b) Numerele fiind distincte, cu suma 2023067, ele pot fi 1, 2, 3, ..., 2011. Cum $S = 2023066 < 2023067$, rezultă că cel puțin unul dintre ele este mai mare decât 2011. Numerele sunt 1, 2, 3, ..., 2010, 2012. **27.**
$$\begin{array}{l} a = 1 + 6 + 6^2 + ... + 6^{59} \mid \cdot 6 \\ 6a = 6 + 6^2 + 6^3 + ... + 6^{60} \quad - \\ 5a = 6^{60} - 1 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} b = 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{79} \mid \cdot 5 \\ 5b = 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{80} \quad - \\ 4b = 5^{80} - 1 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot a = (6^3)^{20} - 1 = 216^{20} - 1 \\ 4 \cdot b = (5^4)^{20} - 1 = 625^{20} - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot a < 4 \cdot b$. **28.** a) $a = (5^{2n} : 5^n - 5^n + 81 - 64 - 17) \cdot [(3^2 - 25 - 7) : 1993] + 1993 = 1993$; $b = 2^5 \cdot 1992^5 - 2^5 \cdot 1992^5 + 24 \cdot 83 = 24 \cdot 83 = 1992$; $c = 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 4 = 1994$. Atunci $m = (2 \cdot a - b - c)^{1907} = (2 \cdot 1003 - 1992 - 1994)^{2007} = 0^{2007} = 0$; b) Din $a = 2^n \cdot (2^2 + 3 \cdot 2 - 9) = 2^n$ și $b = 2 \cdot 2^n \cdot 5^n - 10^n = 10^n(2 - 1) = 10^n \Rightarrow a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $a = b$, dacă $n = 0$. **29.** Numerele a, b, c se pot scrie: $a = 2^{333} \cdot (4 - 2 - 1) = 2^{333} = (2^3)^{111} = 8^{111}$; $b = 3^{222} \cdot (9 - 3 - 1) = 5 \cdot 3^{222} = 5 \cdot (3^2)^{111} = 5 \cdot 9^{111}$; $c = 4^{111} \cdot (16 - 4 - 1) = 11 \cdot 4^{111}$; $x = c : 11 = 11 \cdot 4^{111} : 11 = 4^{111}$. Din toate aceste relații rezultă $4^{111} < 8^{111} < 5 \cdot 9^{111} \Rightarrow x < a < b$.

$$\left(10^5+\frac{2^{10}}{10^5}\right)\left(10^5+\frac{5^{10}}{10^5}\right)=10^{10}+5^{10}+2^{10}+1=(2^{10}+1)(5^{10}+1)\in\mathbb{N}.$$

III. Careul numeric. Careul magic și supermagic

1. În pătratul 3 × 3 sunt patru pătrate 2 × 2 cu căsuțe alăturate. Numerele a, b, d, e apar în câte două pătrate 2 × 2, f în unul singur iar numărul c apare în fiecare pătrat 2 × 2.

15	a
b	c

a	29
c	d

b	c
40	e

c	d
e	f

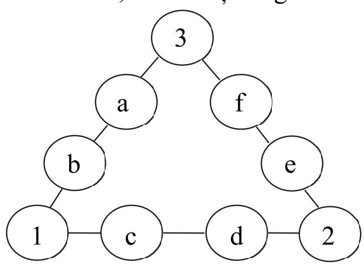
Numărul a apare în primul pătrat 2 × 2 de 15 ori și în al doilea de 29 ori. Deci a = 15 + 29 = 44. Numărul b apare în primul pătrat de 15 ori și în al treilea de 40 ori. deci b = 15 + 40 = 55. Cum c apare în primul pătrat de 15 ori, în al doilea de 29 ori și în al treilea de 40 ori ⇒ f = c – (15 + + 29 + 40) = 100 – 84; f = 16 și d = 29 + 16 = 45; e = 100 – 44 = 56. Deci a = 44; b = 55; c = = 100; d = 45; e = 56; f = 16.

Observație: Numărul c din centrul pătratului 3 × 3 este egal cu suma numerelor din căsuțele 1, 3, 7 și 9; c = 100 = 15 + 29 + 40 + 16.

2. Folosind soluția problemei 1) avem: c = 408 + 450 + 650 + 500 = 2008; b = 408 + 650 = = 1058; d = 450 + 500 = 950; e = 650 + 500 = 1150; a = 408 + 450 = 858. **3.** Fie S suma constantă. Atunci a + b + 7 = S; a + d + 11 = S ⇒ a + 7 = d + 11 ⇒ b = d + 4. $\left.\begin{array}{l}a+b+7=S\\ a+21=S\end{array}\right|\Rightarrow$

⇒ b + 7 = 21 ⇒ b = 14 și d = 10; $\left.\begin{array}{l}11+c+g=S\\ 26+c=S\end{array}\right|$ ⇒ 11 + g = 26 ⇒ g = 15; $\left.\begin{array}{l}a+21=S\\ c+26=S\\ e+25=S\end{array}\right|$ ⇒ a = c + + 5 = e + 4 deci a > 5 și a, c, e cele mai mici numere naturale și lipsesc numerele 12, 13, 17 ⇒ ⇒ e = 12, c = 13, a = 17 și suma constantă S = 38. Verificați celelalte linii, coloane și diagonale.

4. Vom înlocui cerculețele libere cu numerele naturale a, b, c, d, e, f pe care urmează să le aflăm. Avem a + b = 13 (a și b de parități diferite); c + d = 14 (c și d de aceeași paritate); e + f = 12 (e și f de aceeași paritate);



	Soluția I	Soluția a II-a
a + b = 13	a = 6, b = 7	a = 4, b = 9
c + d = 14	c = 5, d = 9	c = 6, b = 8
e + f = 12	e = 4, f = 8	e = 5, f = 7

Soluția I: 1 + 5 + 9 + 2; 2 + 4 + 8 + 3; 1 + 6 + 7 + 3;
Soluția a II-a: 1 + 6 + 8 + 2; 2 + 5 + 7 + 3; 1 + 4 + 9 + 3.

5. a) 2x + 1 + 2x + 3 + 2x + 5 + 2x + 7 + 2x + 9 + 2x + 11 + ... + 2x + 17 = 18x + (1 + 3 + 5 + + ... + 17) = 9^2 ⇔ 18x + 9^2 = 9^2 ⇒ x = 0. Numerele sunt 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Numerele din cele trei vârfuri apar de câte două ori în sumele constante S = 30, suma lor este 3 · 30 – – 81 = 9, iar cele trei numere vor fi 1, 3, 5 și descoperiți o soluție, folosind o rezolvare asemănătoare cu cea de la problema 4: a + b = 26 ⇒ a și b sunt cele mai mari numere impare ≤ 17; a = 9; b = 17 (soluția I) ...... continuați; a = 11, b = 15 (soluția a II-a) ..... continuați.
Soluția I: 1 + 11 + 13 + 5 = 5 + 7 + 15 + 3 = 3 + 9 + 17 + 1;
Soluția a II-a: 1 + 17 + 7 + 5 = 5 + 9 + 13 + 3 = 3 + 11 + 15 + 1. Găsiți și alte soluții!

b) $2x + 2x + 2x + 4 + 2x + 6 + ... + 2x + 16 = 90$; $18x + 2(1 + 2 + 3 + ... + 8) = 90 \Leftrightarrow x = 1$. Numerele sunt: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18. Procedăm ca la 5a) și problema 4)
$3 \cdot 34 - 90 = 12$ suma celor trei noduri din vârfurile triunghiului, numai $4 + 2 + 6 = 12$. Continuați.
Soluția I: $2 + 16 + 12 + 4 = 4 + 10 + 14 + 6 = 6 + 8 + 18 + 2 = 34$;
c) $3 \cdot 46 - 90 = 48$, numai $14 + 16 + 18 = 48$, continuați ...
Soluția I: $14 + 6 + 10 + 16 = 16 + 4 + 8 + 18 = 18 + 2 + 12 + 14 = 46$.
6. Observăm: $44 - 27 = 17$; $57 - 44 = 13$; $135 - 118 = 17$; $148 - 135 = 13$, deci $2010 - x = 17 \Rightarrow x = 1993$; $y - 2010 = 13 \Rightarrow y = 2023$. **7.** Suma tuturor numerelor folosite în careul magic 3×3 este $3 \cdot 24 = 72$ (suma numerelor de pe cele trei linii). Vom afla cele 9 numere cu suma lor 72. Cum $1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45 < 72 \Rightarrow$ numerele sunt consecutive, cu primul număr ≥ 4;
$x + x + 1 + x + 2 + ... + (x + 8) = 72 \Rightarrow 9x + 36 = 72 \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = 4$. Numerele sunt: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Se pune problema aflării numărului din centrul pătratului 3×3. Acesta este $S : 9 = 72 : 9 = 8$ și acum putem afla mai multe soluții. Iată o soluție:

11	4	9
6	8	10
7	12	5

Altă soluție: Schimbăm linii între ele, coloane între ele.
8. Notăm căsuța a treia cu a, atunci căsuța 7 este $a + 6$, iar cea din mijloc $37 - a$. Căsuța a 9-a este $2a - 13$ iar a 8-a, $50 - 2a$. Avem: $19 + a = 87 - 3a \Rightarrow 4a = 68 \Rightarrow a = 17$. Deci

19	24	a
18	37–a	
a+6	50–2a	2a–13

19	24	17
18	20	22
23	16	21

Suma constantă de pe fiecare linie, coloană și diagonală este $19 + 24 + 17 = 17 + 20 + 23 = 60$.
Observație: $20 = \frac{19+21}{2} = \frac{24+16}{2} = \frac{17+23}{2} = \frac{18+22}{2}$. Procedeul folosit: numărul din centrul pătratului magic este media aritmetică a numerelor aflate în căsuța 1 și 3, 4 și 6, 2 și 8, 1 și 9, 3 și 7.
9. a) Vom nota căsuțele de pe prima diagonală cu a, b, c. Atunci suma constantă este $S = a + b + c$; avem relațiile: $a + 39 = S$; $b + 38 = S$; $c + 37 = S \Rightarrow S + 144 = 3S \Rightarrow S = 57$. Deci $a = 18$, $b = 19$, $c = 20$ și urmează să aflăm căsuța 2 ocupată de numărul $57 - (18 + 24) = 14$, iar căsuța 8 este ocupată de numărul $57 - (14 + 20) = 23$.

a		24
25	b	13
14		c

Soluția este:

18	15	24
25	19	13
14	23	20

Aceeași observație ca la problema 8;

b) Soluția este foarte simplă. Suma constantă este 27. Înlocuind căsuțele libere cu litere mici ale alfabetului, se formează ecuații simple. Continuați!
c) Soluție asemănătoare cu cea de la 9a).
10. Folosim proprietățile pătratului supermagic enunțate la început.
$12^3 = 6 \cdot 12 \cdot 24$; $12^3 = 4 \cdot 12 \cdot b \Rightarrow 4 \cdot b = 12^2 \Rightarrow b = 144 : 4 = 36$;
$e \cdot 4 \cdot 24 = 12^3 \Rightarrow e \cdot 8 = 144 \Rightarrow e = 18$; $6 \cdot a \cdot 36 = 12^3 \Rightarrow 18a = 12^2 \Rightarrow a = 8$; $d \cdot 36 \cdot 24 = 12^3 \Rightarrow d \cdot 6 = 12 \Rightarrow d = 2$; $c \cdot 24 = 12^3 \Rightarrow 2 \cdot c = 144 \Rightarrow c = 72$. Soluția este:

6	a	b
c	12	d
4	e	24

6	8	36
72	12	2
4	18	24

11. Produsul celor nouă numere este 2^{45}. Cubul numărului din mijloc este 2^{15}, deci numărul din mijlocul pătratului supermagic este 2^5. Vom obține mai multe soluții folosind pătratul magic format din cifrele nenule cu suma constantă 15. Iată o soluție:

2^6	2^7	2^2
2^1	2^5	2^9
2^8	2^3	2^4

Verificăm alte proprietăți:
$(2^5)^2 = 2^7 \cdot 2^3 = 2^1 \cdot 2^9 = 2^6 \cdot 2^4 = 2^8 \cdot 2^2 = (2^5)^2$.

CUPRINS