Petre Năchilă Cătălin-Eugen Năchilă

Exerciţii şi probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a VII-a

Editura Nomina

ALGEBRĂ

Capitolul 1
DIVIZIBILITATE.
MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

1. Să se demonstreze că pentru orice număr natural m, există numărul natural n, astfel încât numărul $a = 3 \cdot 5^n + 5^{2m}$ să fie pătrat perfect.
2. Să se determine numărul prim n pentru care numărul $n^2 + 13$ este număr prim.
3. Să se determine numărul $n \in \mathbf{N}$, ştiind că $8n + 1$ şi $24n + 1$ sunt pătrate perfecte, iar $8n + 3$ este număr prim.
4. Fie $a, b \in \mathbf{N^*}$ şi fie $d = (a, b)$, $m = [a, b]$. Să se demonstreze că $a + b \geq d + m$.
5. Să se determine numărul natural n pentru care numărul $a = n^3 - 3(n^2 - n + 3)$ este număr prim.
6. Să se determine numerele prime m şi n, ştiind că numerele $a = mn + 7$ şi $b = 4m + n$ sunt prime.
7. Fie $x, y \in \mathbf{N^*}$ astfel încât $4^{x-2} + 4^{y+1} \leq 2^{x+y}$. Să se demonstreze că numărul $a = 2^x + 2^y$ este divizibil cu 9.
8. Să se determine numerele întregi m şi n, ştiind că numărul $p = m^2n - 3mn + m + 2n - 2$ este prim.
9. Să se demonstreze că există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (a, b) astfel încât $a < b$, $b + 1 \mid a^2$ şi $a + 1 \mid b^2$.
10. Să se determine $n \in \mathbf{N}$, ştiind că numerele n, n + 2, n + 6, n + 14 şi n + 18 sunt simultan numere prime.
11. Să se determine numerele $n \in \mathbf{N}$ pentru care numerele n + 2, n + 4, n + 8, n + 10, n + 16 sunt simultan numere prime.
12. Să se determine $n \in \mathbf{N}$, pentru care numerele n + 3, n + 7, n + 13, n + 15, n + 19 şi n + 25 sunt simultan numere prime.
13. Să se demonstreze că nu există n numere naturale impare, prime şi consecutive, unde $n \geq 4$.
14. Să se demonstreze că există numere de forma $A = \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n\ \text{cifre}}\underbrace{bb\ldots b}_{n\ \text{cifre}}}$ care se pot scrie ca produs de două numere naturale consecutive, unde a = 2b.
15. Să se demonstreze că numărul $a = 2^{2025} + 1$ nu este număr prim.
16. Să se demonstreze că numerele $A = \overline{\underbrace{999\ldots9}_{100\ \text{cifre}}n}$ sunt numere compuse.
17. Să se determine cel mai mare divizor prim al numărului de patru cifre $A = \overline{abcd}$, unde b = 3a, d = 3c.

18. Să se demonstreze că numerele A = $\overline{\underbrace{aaa...a}_{n\,cifre}}$, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, nu sunt pătrate perfecte.
19. Fie a, b, c numere prime distincte. Fie $n \in \mathbf{N}$ şi fie numărul $A = a^{4n} + b^{4n} + c^{4n}$. Să se demonstreze că A nu este pătrat perfect.
20. Să se determine numerele naturale n pentru care numerele $2^n - 1$ şi $2^n + 1$ sunt simultan numere prime.
21. Fie a şi b numere prime astfel încât $a > b \geq 5$. Să se demonstreze că există un număr de două cifre care divide numărul $a^2 - b^2$.
22. Să se determine numerele prime a, b, c, d, n ştiind că $a = b + c = d - n$.
23. Fie numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$ astfel încât $a_2^2 = a_1a_3$, $a_3^2 = a_2a_4$, ..., $a_{n-1}^2 = a_{n-2}a_n$ şi $a_n^2 = a_{n-1}a_1$. Să se afle numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ştiind că $a_1^2 + a_2^2 + {}$ $+ ... + a_n^2 = 4n$.
24. Să se precizeze care numere de la 1 la 999999 sunt mai multe: cele care se divid cu 13, dar nu se divid cu 17 sau cele care se divid cu 17, dar nu se divid cu 13.
25. Fie numărul $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât suma cifrelor lui n este egală cu suma cifrelor lui 3n. Să se demonstreze că $3 \mid n$, $9 \mid n$, dar nu neapărat $27 \mid n$.
26. Se consideră numărul 213213213213. Care cifre trebuie şterse pentru a obţine cel mai mare număr divizibil cu 9?
27. Se consideră 3 numere naturale a, b, c cu $a + b + c = 12$. La oricare două dintre cele trei numere se adaugă 1 şi numerele obţinute înlocuiesc pe cele date iniţial, unul rămânând egal cu cel dat. Este posibil ca după mai multe astfel de operaţii să se obţină trei numere impare egale?
28. Fie numărul $a_n = 111...1$, care conţine n cifre de 1, $n \in \mathbf{N}^*$. Ştiind că $7 \mid a_n$, să se demonstreze că există 4 numere prime de cel mult două cifre care divid numărul a_n.
29. Să se determine numerele prime $a = n^4 + 3n^2 - 2n + 3$, $n \in \mathbf{N}$.
30. Suma a patru numere naturale este 630. Să se determine cea mai mică valoare pe care o are c.m.m.m.c. al celor patru numere.
31. Să se determine cel mai mare număr de numere naturale consecutive care în descompunerile lor în factori primi au aceşti factori primi cu exponenţii numere naturale impare.
32. Să se determine numerele prime m, n, p ştiind că numărul $A = (m^2 - np)(n^2 - {}$ $- mp)(p^2 - mn)$ este număr prim.
33. Să se demonstreze că nu există numerele naturale a, b, c, d diferite între ele, astfel încât $3^a + 3^b + 3^c = 3^d$.
34. Să se determine numerele $\overline{abc}$ pentru care $\overline{abc} = (a + b + c)^2 + a + b + c$.
35. Să se determine $n \in \mathbf{Z}$ şi numerele prime p şi q, pentru care $n^3 = n + pq$.
36. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ şi numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ cu proprietatea $|a_i| \in \{0, 1\}$ pentru orice $i = {}$ $= \overline{1,n}$ şi $a_1 + a_2 + ... + a_n = a$, $a \in \mathbf{Z}$.

a) Să se calculeze $a_1^{2m+1} + a_2^{2m+1} + ... + a_n^{2m+1}$, unde $m \in \mathbf{N}$.

GEOMETRIE

Capitolul 1
PARALELISM. PERPENDICULARITATE
CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR

1. Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$. Să se demonstreze că:

a) $OA \parallel PC$, $OB \parallel PD \Rightarrow \sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle CPD$ sunt congruente sau suplementare;

b) $OA \perp PC$, $OB \perp BD \Rightarrow \sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle CPD$ sunt congruente sau suplementare.

2. Să se demonstreze că dacă două mediane ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

3. Să se demonstreze că dacă două bisectoare interioare ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

4. Să se demonstreze că dacă două înălțimi ale unui triunghi sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel.

5. Să se demonstreze că două unghiuri adiacente sunt suplementare dacă şi numai dacă bisectoarele lor sunt perpendiculare.

6. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri cu laturile paralele sunt paralele sau perpendiculare.

7. Să se enunțe şi să se demonstreze o proprietate analogă pentru unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare.

8. O paralelă la bisectoarea (AD) a triunghiului ABC intersectează dreptele AB şi AC în punctele M şi N. Să se demonstreze că ΔAMN este isoscel.

9. Să se demonstreze că perpendicularele duse din vârful A al triunghiului dreptunghic ABC pe bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ sunt bisectoarele unghiurilor formate de înălțimea dusă din A cu cele două catete.

10. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$ taie înălțimile BH şi CH în M, respectiv N.

a) Să se demonstreze că ΔHMN este isoscel.

b) În ce condiții ΔHMN este echilateral?

11. Fie (AD) mediană în ΔABC. Să se demonstreze că distanțele de la B şi C la AD sunt egale.

12. Fie unghiul $\sphericalangle xOy$. Pe (Ox şi (Oy se iau punctele A şi C, respectiv B şi D astfel încât $OA = OB$, $OC = OD$. Dreptele AD şi BC se taie în punctul M. Să se demonstreze că (OM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle xOy$.

13. Fie (B'C') linie mijlocie în triunghiul ABC, iar (AD), (AE), (AF) înălțimea, bisectoarea, respectiv mediana din vârful A. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor (AD), (AE), (AF) se află pe dreapta B'C'.

14. Să se demonstreze că simetricele a trei puncte coliniare față de o dreaptă sunt trei puncte coliniare.

15. Fie ΔABC. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ se intersectează în punctul D, iar bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ se intersectează în punctul E. Să se demonstreze că punctele A, D, E sunt coliniare.
16. Fie M şi N mijloacele laturilor (BC) şi (AB) ale triunghiului ABC. Fie P piciorul perpendicularei dusă din B pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Să se demonstreze că $P \in$ $\in MN$.
17. Fie ΔABC în care $m(\sphericalangle BAC) = 45°$, $CD \perp AB$, $BE \perp AC$, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$. Fie M mijlocul laturii (BC). Să se determine $m(\sphericalangle DME)$.
18. Fie D mijlocul laturii (BC) a triunghiului echilateral ABC. Fie N mijlocul laturii (AB) şi punctul $M \in (DB$, $BM = BD$. Dreapta MN intersectează dreapta AD în punctul P. Să se demonstreze că $AM \perp CP$.
19. Fie ΔABC şi punctul $D \in (BC)$ astfel încât $BC = 3 \cdot CD$. Să se demonstreze că dreapta AD trece printr-un punct fix.
20. Fie ΔABC cu $AB < AC$ şi fie N şi P mijloacele laturilor (AB), respectiv (AC). Fie $D \in (PC)$, $PD = AN$. Să se demonstreze că perpendiculara dusă din punctul D pe bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle A$ trece printr-un punct fix.
21. Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor duse din vârful A al triunghiului ABC pe bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle C$ sunt patru puncte coliniare.
22. Fie (BD) şi (CE) înălţimi în ΔABC. Fie $M \in (BD$, $BM = AC$, $N \in (CE$, $CN = AB$. Să se demonstreze că $AM = AN$ şi $AM \perp AN$.
23. În ΔABC pe înălţimile din B şi C se iau punctele M şi N, respectiv P şi Q, astfel încât $BM = BN = AC$, $CP = CQ = AB$, unde M şi N se iau spre exteriorul triunghiului. Să se demonstreze că triunghiurile AMP şi ANQ sunt dreptunghice şi isoscele.
24. Fie M şi N mijloacele catetelor (AC) şi (AB) ale triunghiului dreptunghic ABC. Fie D piciorul înălţimii din A. Dreptele MD şi ND intersectează dreptele AB, respectiv AC în punctele P şi Q. Să se demonstreze că $PQ \perp BC$.
25. Prin centrul G de greutate al triunghiului ABC se duce o dreaptă oarecare d. Să se demonstreze că suma distanţelor a două vârfuri situate de aceeaşi parte a dreptei d la dreapta d este egală cu distanţa celui de-al treilea vârf la dreapta d.
26. Să se demonstreze că suma distanţelor a celor trei vârfuri ale unui triunghi la o dreaptă oarecare este egală cu de 3 ori distanţa centrului de greutate al triunghiului la aceeaşi dreaptă.
27. Fie ΔABC isoscel ($AB = AC$). Fie punctul D în interiorul triunghiului astfel încât $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle DCA$. Să se demonstreze că $AD \perp BC$.
28. Fie ΔABC isoscel, $AB = AC$. Perpendiculara în A pe AC şi perpendiculara în B pe BC se intersectează în punctul E. Perpendiculara în A pe AB şi perpendiculara în C pe BC se intersectează în punctul F. Să se demonstreze că $AE = AF$ şi $BE = CF$.
29. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi MNP sunt congruente dacă şi numai dacă $AB = MN$, $BC + CA = NP + PM$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$.
30. Fie ΔABC isoscel ($AB = AC$), $M \in (AC)$, $MA = MC$. Fie punctul $D \in (BM$ astfel încât $AD = AB$. Fie E şi F mijloacele segmentelor (AB) şi (AD). Să se demonstreze că $CE + CF = BD$.

TEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

1. INEGALITĂȚI ELEMENTARE

a) Relația de ordine pe R. Inegalități

Definiție. Spunem că numărul real x este mai mic decât numărul real y (sau că y este mai mare decât x) dacă există numărul real strict pozitiv a, astfel încât $y = x + a$.

Avem deci $x < y \Leftrightarrow$ există $a > 0$ astfel încât $y = x + a$.

Spunem că x este mai mic sau egal cu y dacă $x = y$ sau $x < y$. Cu alte cuvinte avem $x \le y$ dacă există $a \ge 0$ astfel încât $y = x + a$.

Relația „≤" se numește relație de ordine pe **R**. Relația „≤" are proprietățile:

a) este reflexivă: $x \le x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$;

b) este antisimetrică: $x \le y$ şi $y \le x \Rightarrow x = y$;

c) este tranzitivă: $x \le y$ şi $y \le z \Rightarrow x \le z$.

Proprietăți ale relației de ordine:

1) $x \le y,\ a \in \mathbf{R} \Rightarrow x + a \le y + a$;

2) $x \le y,\ a \ge 0 \Rightarrow ax \le ay$;

3) $x \le y,\ a \le 0 \Rightarrow ax \ge ay$;

4) $0 \le x \le y,\ 0 \le a \le b \Rightarrow 0 \le ax \le by$;

5) $0 < x \le y \Rightarrow \frac{1}{x} \ge \frac{1}{y} > 0$;

6) $x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow x^2 > 0$;

7) $0 < x \le y,\ n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow 0 < x^n \le y^n$;

8) $x \le y < 0,\ n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow 0 < y^{2n} \le x^{2n}$;

9) $x \le y,\ n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow x^{2n+1} \le y^{2n+1}$;

10) $0 < x \le y \Rightarrow 0 < \sqrt{x} \le \sqrt{y}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se demonstreze că:

a) $2^{49} \cdot 3^9 < 5^{20} \cdot 7^9$; b) $2 < \sqrt{6 + \sqrt{6 + ... + \sqrt{6}}} < 3$, $n \ge 2$ (radicali).

Soluție: a) $2^{40} \cdot 2^9 \cdot 3^9 < 5^{20} \cdot 7^9 \Leftrightarrow \frac{2^{40}}{5^{20}} < \frac{7^9}{2^9 \cdot 3^9} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{20} < \left(\frac{7}{6}\right)^9$. Deoarece $\frac{4}{5} < 1 < \frac{7}{6}$ rezultă că $\left(\frac{4}{5}\right)^{20} < 1 < \left(\frac{7}{6}\right)^9$; b) Avem $\underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + ... + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}}_{n} = 3$ şi $\sqrt{6 + \sqrt{6 + ... + \sqrt{6}}} > \sqrt{6} > 2$.

2. Fie $x, y, z, t \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că numerele $x - y^2$, $y - z^2$, $z - t^2$, $t - x^2$ nu sunt simultan mai mari decât $\frac{1}{4}$.

Soluție. Presupunem $x - y^2 > \frac{1}{4}, y - z^2 > \frac{1}{4}, z - t^2 > \frac{1}{4}, t - x^2 > \frac{1}{4}$. Însumând inegalitățile obținem: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - x - y - z - t + 1 < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 < 0$ (fals).

3. Fie $a, b, c \in \mathbf{R}$, $x, y, z > 0$. Să se demonstreze că:

a) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$; b) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Soluție. a) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x + y) \geq xy(a + b)^2 \Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$; b) Aplicând de două ori inegalitatea de la a) avem: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

4. Să se demonstreze că dacă $x \geq 1$, $y \geq 1$ atunci avem: $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy$.

Soluție. Deoarece $xy > 0$, împărțind cu xy, inegalitatea este echivalentă cu $\frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq 1$. Demonstrăm că pentru $x \geq 1$, $y \geq 1$ avem: $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{y-1}}{y} \leq \frac{1}{2}$ și prin însumare, rezultă inegalitatea cerută. Într-adevăr, $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$.

5. Să se demonstreze că dacă $x, y \in [8, 10]$, atunci $xy - 9(x + y) + 90 \in [8, 10]$.

Soluție. Deoarece $x, y \in [8, 10]$, atunci $x - 9, y - 9 \in [-1, 1]$ și deci $(x - 9)(y - 9) = xy - 9(x + y) + 81 \in [-1, 1]$. Adunând 9, rezultă că $xy - 9(x + y) + 90 \in [8, 10]$.

6. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $a + b = 2$. Să se demonstreze că $a^2 + b^2 \geq 2$; $a^4 + b^4 \geq 2$.

Soluție. Fie $a = 1 + x$, $b = 1 - x$, $x \in \mathbf{R}$. Atunci $a^2 + b^2 = (1 + x)^2 + (1 - x)^2 = 2 + 2x^2 \geq 2$. Avem $a^4 + b^4 = (1 + x)^4 + (1 - x)^4 = 2 + 12x^2 + 2x^4 \geq 2$. Avem egalitate pentru $x = 0 \Leftrightarrow a = b = 1$.

7. Fie $x \in [-1, 1]$. Să se demonstreze că $2,73 < \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} < 2,83$.

Soluție. Fie $f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}$. Dacă $x \in [-1, 1]$ avem evident $f(x) > 0$. Atunci $f^2(x) = 4 + 2\sqrt{4-x^2}$. Deoarece $0 \leq x^2 \leq 1$ rezultă că $4 - x^2 \in [3, 4]$ și deci $4 + 2\sqrt{3} \leq f^2(x) \leq 4 + 2\sqrt{4} = 8$. Avem $(\sqrt{3}+1)^2 \leq f^2(x) \leq 8$ și deci $1 + \sqrt{3} < f(x) < 2\sqrt{2}$. Deoarece $2,73 < 1 + \sqrt{3}$ și $2\sqrt{2} < 2,83$, rezultă că $2,73 < f(x) < 2,83$.

8. Fie a, b ∈ **R***. Să se demonstreze că $\frac{1}{3} \le \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \le 3$.

Soluție. Inegalitățile sunt echivalente cu: $\frac{1}{3} \le \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1} \le 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \le 3$, (∀) x ∈ **R***. Prima inegalitate este echivalentă cu $3x^2 - 3x + 3 \ge x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 2(x - 1)^2 \ge 0$, cu egalitate pentru x = 1, adică a = b. A doua inegalitate este echivalentă cu $3x^2 + 3x + 3 \ge x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 \ge 0$, cu egalitate pentru x = –1, adică b = –a.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se demonstreze proprietățile relației de ordine pe **R**.
2. Fie a, b ∈ **R**, n ∈ **N***. Să se arate că $(a - b)(a^{2n+1} - b^{2n+1}) \ge 0$.
3. Fie a, b ∈ $\mathbf{R}_+$, n ∈ **N***. Să se arate că $(a - b)(a^n - b^n) \ge 0$.
4. Fie a, b, c, d, x, y ∈ **N*** astfel încât $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{x}{y}$. Să se demonstreze că:

a) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$;   b) $\frac{a}{b} < \frac{a+c+x}{b+d+x} < \frac{x}{y}$.

5. Să se demonstreze că pentru orice x ∈ **R** avem:

a) $\frac{x}{x^2 + x + 1} \le \frac{1}{3}$;   b) $x^4 - x^2 + 2x + 2 \ge 0$;   c) $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$.

6. Să se demonstreze că:

a) $x, y \in (-1, 1) \Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$;

b) $|x| \le 1; |y| \le 1 \Rightarrow (x + y)^2 \le 4$.

7. Să se demonstreze că dacă a ∈ **R** şi x, y ∈ [a – 1, a + 1], atunci $xy - a(x + y) + a^2 + a \in [a - 1, a + 1]$.

8. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ge \sqrt{x + y}$, (∀) x, y ≥ 0;   b) $0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$, (∀) x > 0;

c) $1 < \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$, (∀) x > 0;   d) $\sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{13}} \ge \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{17}}$.

9. Fie x > 0. Să se demonstreze că: $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} < \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}$.

10. Fie d ≥ c ≥ b ≥ a ≥ 0 şi a + b + c + d = 4. Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua fiecare variabilă.

11. Fie x, y, z ∈ **R**. Să se demonstreze că:
$(1 - x^2 + x^4)(1 - y^2 + y^4)(1 - z^2 + z^4) \ge x^2y^2z^2$.

SOLUȚII

ALGEBRĂ

Capitolul 1
DIVIZIBILITATE. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

1. Luând $n = 2m + 1$ avem $a = 5^{2m} \cdot 16 = (4 \cdot 5^m)^2$.
2. Deoarece $n \in \mathbf{N}$ rezultă că $n^2 + 13 \geq 13$. Cum $n^2 + 13$ este număr prim, rezultă că $n = 2$;
3. Observăm că 0 şi 1 sunt soluții. Orice $n \geq 2$ nu este soluție.
4. Pentru $a = b$ avem $d = m = a = b$ şi avem egalitate. Presupunem $a < b$ şi fie $a = dn$, $b = dp$, $n, p \in \mathbf{N}^*$, $(n, p) = 1$, $n < p$. Avem $m = dnp$ şi atunci rezultă că $a + b = dn + dp \leq d + m = d + dnp \Leftrightarrow n + p \leq 1 + np \Leftrightarrow (n - 1) \cdot (p - 1) \geq 0$.
5. Avem $a = (n - 3)(n^2 + 3)$. Rezultă $n - 3 = 1$ şi $n = 4$.
6. Deoarece $a = mn + 7$ este număr prim, rezultă că $m = 2$ sau $n = 2$. Dacă $m = 2$ avem $a = 2n + 7$, $b = 8 + n$. Rezultă că n este număr impar. Dacă $n = 6k + 1$, avem $a = 3(4k + 3)$ (imposibil). Dacă $n = 6k - 1$, avem $k \in \{1, 2\}$ şi deci $n \in \{5, 11\}$. Mai este soluție şi $n = 3$. Dacă $n = 2$, avem $a = 2m + 7$, $b = 4m + 2$ şi b nu este număr prim.
7. Avem $(2^{x-2} - 2^{y+1})^2 \leq 0$, de unde $x = y + 3$, $a = 2^y \cdot 9$.
8. Avem $(m - 2)(mn - n + 1) = p$, unde p este număr prim. Atunci $m - 2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ şi deci $m \in \{0, 1, 3, 5\}$. Dacă $m = 0$, rezultă $n = \frac{p+2}{2} = 2$. Dacă $m = 1$, rezultă $p = -1$ (imposibil). Dacă $m = 3$, avem $p = 2n + 1$ şi atunci $n = \frac{p-1}{2}$, unde p este număr prim impar. Dacă $m = 4$, rezultă $p = 6n + 2$, nu este număr prim.
9. Perechile $(n, n^2 - 1)$, $n \in \mathbf{N}^*$, sunt soluții deoarece $n^2 - 1 + 1 = n^2$ şi $(n^2 - 1)^2 = (n - 1)^2(n + 1)^2 = (n + 1) \cdot [(n - 1)^2 \cdot (n + 1)]$.
10. Se observă că 2 şi 3 nu sunt soluții, iar 5 este soluție. Luând $n = 5k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, atunci avem $5 \mid n$ pentru perechile $(n + 14, 5k + 1)$, $(n + 18, 5k + 2)$, $(n + 2, 5k + 3)$ şi $(n + 6, 5k + 4)$.
11. Numerele pare nu sunt soluții. Numerele 1 şi 5 nu sunt soluții. Numărul 3 este soluție. Se studiază cazurile $n = 5k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Nu mai sunt alte soluții.
12. Se observă că numerele impare nu sunt soluții. Observăm că 0 şi 2 nu sunt soluții şi că $n = 4$ este soluție. Se iau numerele de forma $6k + r$, $k \in \mathbf{N}^*$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi nu mai obținem alte soluții.
13. Cel puțin unul dintre numerele $m, m + 2, m + 4, m + 6$, unde $m \in \mathbf{N}^*$, $m \geq 3$, este divizibil cu 3 şi cel puțin egal cu 7 (luând $m = 3k + r$, $k \in \mathbf{N}^*$, $r \in \{0, 1, 2\}$).
14. Avem $A = b \cdot B$, unde $B = \underbrace{22...2}_{n}\underbrace{11...1}_{n} = 2 \cdot 10^n(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}) + (1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}) = (1 + 10 + ... + 10^{n-1})(1 + 2 \cdot 10^n)$. Pentru $b = 2$ avem $2 \cdot (1 + 10 + ... + 10^{n-1}) = 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9}$, unde $\frac{10^n - 1}{9} \in \mathbf{N}$. Rezultă că $A = \frac{2(10^n - 1)}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}$, unde $\frac{2(10^n - 1)}{3}$ şi

$\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\in \mathbf{N}$ şi $\frac{2\cdot 10^n+1}{3}-1=\frac{2(10^n-1)}{3}$.

15. Avem a = $(2^{675})^3 + 1 = (2^{675} + 1)(2^{1350} – 2^{675} + 1)$.

16. Pentru n ∈ {0, 2, 4, 6, 8} avem 2 | A. Pentru n ∈ {0, 3, 6, 9} avem 3 | A, iar pentru n ∈ ∈ {0, 5} avem 5 | A. Pentru n = 1 avem A = $10^{100} – 9 = (10^{50} – 3)(10^{50} + 3)$. Pentru n = 7, împărţim numărul A în 16 grupe de forma 999999 şi grupa 9997. Cum 13 | 999999 şi 13 | 9997 rezultă că 13 | A.

17. Avem A = 1300a + 13c = 13 · $\overline{a0c}$, unde a ∈ {1, 2, 3}, c ∈ {0, 1, 2, 3}. În acest caz trebuie determinat cel mai mare număr prim de forma $\overline{a0c}$, care este numărul 103.

18. Deoarece ultima cifră a unui pătrat perfect este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, rezultă că a ∉ {0, 2, 3, 7, 8}. Orice pătrat perfect este de forma 4k sau 4k + 1 şi deci a ∉ {1, 5, 6, 9}. Dacă a = 4, avem A = 2^2 · B, unde B nu este pătrat perfect.

19. Dacă a, b, c ∉ {2, 5}, atunci a^{4n}, b^{4n}, c^{4n} au ultima cifră egală cu 1 şi deci ultima cifră a lui A este dată de u(A) = 3 şi deci A nu este pătrat perfect. Dacă {a, b} = {2, 5}, atunci u(A) = = u(6 + 5 + 2) = 3 şi A nu este pătrat perfect. Dacă a = 2 şi b ≠ 5, c ≠ 5, atunci u(A) = u(6 + 1 + + 1) = 8, iar dacă a = 5 şi b ≠ 2, c ≠ 2, atunci u(A) = u(5 + 1 + 1) = 7. Din nou A nu este pătrat perfect.

20. Numerele 0 şi 1 nu sunt soluţii. Numărul 2 este soluţie. Pentru n ≥ 3 avem două cazuri. Dacă n = 2m, avem $2^{2m} – 1 = (2^m – 1)(2^m + 1)$ şi cum $2^m – 1 \ge 3$, $2^m + 1 \ge 5$, numărul $2^{2m} – 1$ nu este număr prim. Dacă n = 2m + 1, numărul $2^{2m} + 1 = 2 \cdot (3 + 1)^m + 1 = 2(M_3 + 1) + 1 = M_3$ nu este număr prim.

21. Numerele sunt de forma 6n ± 1, 6m ± 1, m, n ∈ **N**. Atunci $a^2 – b^2 = 36n^2 \pm 12n + 1 – – (36m^2 \pm 12m + 1) = 12n(3n \pm 1) – 12m(3m \pm 1)$. Cum n(3n ± 1) şi m(3m ± 1) sunt numere pare, rezultă că 12 | $a^2 – b^2$ şi 24 | $a^2 – b^2$.

22. Avem a ≥ 5, d ≥ 7, b şi c de parităţi diferite. Avem deci b = 2, c impar, sau c = 2, b impar. Dacă b = 2, cum b + c este număr impar, rezultă că n = 2. Avem a = 2 + c = d – 2 şi atunci trebuie să găsim numerele prime c, c + 2, c + 4 cu c ≥ 3. Observăm că c = 3 este soluţie şi avem a = 5, d = 7. Dacă c ≥ 5, nu mai avem soluţie. Dacă c = 3m + 1, atunci c + 2 = 3(m + 1), iar dacă c = 3m + 2, atunci c + 4 = 3(m + 2). Analog mai avem soluţie a = 5, b = 3, c = 2, d = 7, n = 2.

23. Din relaţiile date rezultă $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=...=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{a_1}{a_n}=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1+a_2+...+a_n}=1$ şi deci $a_1 = a_2 = ... = a_n = a \in \mathbf{N}^*$. Din $4n = a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 = n \cdot a^2$ rezultă a = 2.

24. Fie A numărul multiplilor lui 13 de la 1 la 999999, care nu se divid cu 17. Fie B numărul multiplilor lui 17 de la 1 la 999999, care nu se divid cu 13. Fie C numărul multiplilor lui 13 şi 17 de la 1 la 999999. Atunci A + C reprezintă toţi multiplii lui 13 mai mici sau egali cu 999999, iar B + C reprezintă numărul multiplilor lui 17 mai mici sau egali cu 999999. Din A + + C > B + C avem A > B.

25. Notăm cu s(a) suma cifrelor numărului a. Cum 3 | 3n rezultă că 3 | s(3n). Cum s(3n) = s(n), rezultă că 3 | s(n) şi deci 3 | n. Avem 9 | 3n şi deci 9 | s(3n). Cum s(n) = s(3n), rezultă că 9 | s(n) şi deci 9 | n. Nu avem 27 | n de exemplu pentru n = 9.

26. Suma cifrelor numărului n = 213213213213 este 24. Numărul m rămas trebuie să aibă suma cifrelor divizibilă cu 9. Cum m este cât mai mare, atunci s(m) = 18 şi suma cifrelor şterse va fi 6. Pentru ca m să fie maxim trebuie şterse două cifre de 3. Obţinem n = 2132132121.

Cuprins