Petre Năchilă Cătălin-Eugen Năchilă

Exerciţii şi probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a V-a

Ediţia a III-a revizuită şi adăugită

Editura Nomina

Capitolul 1
NUMERE NATURALE

Definiție. Numărul natural a este mai mare decât numărul b dacă există numărul natural $c \geq 1$, astfel încât $a = b + c$.

Avem $a > b$ dacă există $c \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a = b + c$.

Avem $a \geq b$ dacă există $c \in \mathbf{N}$ astfel încât $a = b + c$.

Proprietăți ale relației „≤” și „<”.

1) reflexivitate: $a \leq a$, $(\forall)\ a \in \mathbf{N}$.
2) antisimetrie: $a \leq b$ și $b \leq a \Rightarrow a = b$.
3) tranzitivitate: $a \leq b$ și $b \leq c \Rightarrow a \leq c$; $a < b$ și $b < c \Rightarrow a < c$.
4) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$; $a - d \leq b - d$, $(\forall)\ c \in \mathbf{N}$, $(\forall)\ d \in \mathbf{N}$, $d \leq a$.
5) $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$; $a : d \leq b : d$, $(\forall)\ c \in \mathbf{N}$, $(\forall)\ d \in \mathbf{N}^*$, unde $a : d$ și $b : d$ sunt numere naturale.
6) Pentru orice numere naturale a și b avem $a = b$ sau $a > b$ sau $a < b$.
7) Dacă $a, b \in \mathbf{N}$ și $a < b$, atunci $a \leq b + 1$.
8) Teorema împărțirii cu rest

Pentru orice numere naturale a, b, unde $b \neq 0$, există numerele naturale unice c și r, astfel încât $a = b \cdot c + r$, $r < b$.

9) $0 : b = 0$, $(\forall)\ b \in \mathbf{N}^*$.
10) Împărțirea la 0 (zero) nu are sens.
11) Câtul unei împărțiri poate fi egal cu zero: $a = b \cdot 0 + a$.
12) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Definiție. Pentru orice $a \in \mathbf{N}^*$, orice $n \in \mathbf{N}^*$, definim $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n factori}}$.

Avem $a^1 = a$, $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$, $0^n = 0$ $(n \neq 0)$. Operația 0^0 nu are sens.

Proprietăți ale operațiilor cu puteri

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbf{N}^*$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbf{N}^*$, $m \geq n$;
3) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $a > 0$, $b > 0$, $m \in \mathbf{N}$;
4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbf{N}$.

Probleme propuse

1. Să se calculeze suma $S(n) = 1 + 2 + ... + n$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

2. Să se reconstituie următoarele adunări, ştiind că literele reprezintă numere diferite:

a)
$$\begin{array}{r} NELU+ \\ NICU \\ \underline{GICU} \\ TITI \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} NELU+ \\ TICU \\ \underline{NICU} \\ GICU \end{array}$$

3. Să se reconstituie operaţiile:

```
1XXXX | XX7          15XXX | X6
 XXX  | X4X           XXX  | 4XX
 =55X                 = =9X
   X0X                   X2
   =X8X                  2XX
     XX1                 X1X
     XX2                 = = =
```

4. Dacă $a, b \in \mathbf{N}$, iar $a > 3b + 2$, să se compare $4a$ cu $12b + 11$.

5. Să se determine deîmpărţitul, împărţitorul, câtul şi restul unei împărţiri de numere naturale, dacă împărţitorul este cifră, iar diferenţa dintre deîmpărţit şi rest este 15.

6. Să se determine trei numere naturale nenule dacă produsul lor este dublul sumei lor, iar triplul unui număr este egal cu suma celorlalte două numere.

7. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, să se calculeze sume $S(n) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$.

8. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $2x + 4x + 6x + ... + 200x = 50500$;

b) $x + 3x + 5x + ... + 201x = 40804$.

9. Pentru câte numere de două cifre, câtul împărţirii numărului de două cifre la răsturnatul său este 4.

10. Să se determine numerele de trei cifre care împărţite la răsturnatul fiecăruia dau cel mai mare cât (răsturnatul este luat tot număr de trei cifre).

11. Să se determine numărul de perechi de numere naturale $\overline{ab2}$ şi $\overline{cd3}$, ştiind că suma lor este egală cu suma răsturnatelor lor.

12. Să se determine două numere naturale care au suma 117, iar suma răsturnatelor lor este 180.

13. Să se determine două perechi de numere naturale care au suma 171, iar suma răsturnatelor lor este 405.

14. Să se calculeze următoarele sume:

a) $A = 1002 + 1001 - 1000 - 999 + 998 + 997 - 996 - 995 + ... + 6 + 5 - 4 - 3 + 2 + 1$;

b) $B = 1000 + 999 - 998 - 997 + 996 + 995 - 994 - 993 + ... + 4 + 3 - 2 - 1$.

15. Să se determine numerele naturale n şi $\overline{xy}$, ştiind că $n \cdot \overline{xy} = \overline{x0y}$.

16. Să se determine numerele $\overline{abc}$ dacă $\overline{abc} = \overline{bc}(1 + \overline{bc})$.

17. Să se determine numerele naturale n, ştiind că împărţind pe n la 16, se obţine câtul egal cu restul împărţirii lui n la 25, iar împărţind pe n la 25, se obţine câtul egal cu restul împărţirii lui n la 16.

18. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\overline{xy}+\overline{yz}+\overline{zx}=\overline{xyz}$;   b) $\overline{xyyz}+\overline{yyt}=2995$.

19. Să se determine numărul $\overline{abcd}$ ştiind că: $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=2000$.

20. Să se determine numerele naturale x şi y dacă xy = 3x + y.

21. Să se determine suma a + b + c pentru pătratele magice de mai jos.

16	a	
11	15	b
c	13	

a	17	12
b	c	
18	13	

22. Să se determine numărul natural x minim, pentru care $4\cdot\overline{x6}=\overline{6x}$.

23. Să se determine numărul $\overline{abcd}$ ştiind că $\overline{abcd}-\overline{abc}-\overline{ab}-a=1898$.

24. Fie a, b, c cifre nenule distincte. Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare pe care le poate avea numărul A = $\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bca}+\overline{cab}$.

25. Să se determine trei numere naturale consecutive dacă diferenţa dintre produsul ultimelor două numere şi produsul primelor două numere este 52.

26. Să se determine numerele de patru cifre distincte scrise în ordine crescătoare care au suma cifrelor 15.

27. Daţi exemple de numere pentru care suma cifrelor este egală cu produsul cifrelor.

28. Să se determine cel mai mare şi cel mai mic număr de două cifre, care împărţit la un număr de o cifră dă restul 7.

29. Suma a trei numere este 129. Împărţind aceste numere la 9, 10, 11, se obţin aceleaşi câturi şi aceleaşi resturi. Să se afle numerele.

30. Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale care dau câtul 4 la împărţirea cu 50.

31. Să se afle suma tuturor numerelor de două cifre care împărţite la 11 dau câtul egal cu restul.

32. Să se afle suma tuturor numerelor de două cifre care împărţite la 13 dau restul egal cu triplul câtului.

33. Să se afle restul împărţirii numărului 15! + 6! la 1001.

S-a notat n! = 1 · 2 · 3 · ... · n, pentru orice n ∈ **N***.

34. Să se afle suma tuturor numerelor de două sau trei cifre care împărţite pe rând la numerele 4, 5, 6 dau resturile 3, 4, respectiv 5.

35. Să se afle suma tuturor numerelor de două sau trei cifre, care împărţite la 25, dau restul egal cu o treime din cât.

36. Fie n ≥ 10. Suma a două numere este 2n + 1, iar restul împărţirii unui număr la celălalt este n + 1. Să se afle cele două numere.

37. Să se determine numerele de două cifre care împărţite la 5 dau restul 1 şi împărţite la 4 dau restul 2.

38. Să se determine numerele $\overline{abc}$, care împărţite la $\overline{ab}$ dau câtul a + 1 şi restul a.

Capitolul 7
TEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

7.1. Probleme distractive. Probleme de numărare

1. Calculați următoarele produse: 11 · 11; 111 · 111; 1111 · 1111, etc. Ce observați?
2. Calculați următoarele produse: $\overline{a5}\cdot\overline{a5}$, $1 \le a \le 9$. Ce observați?
3. Calculați $9 \cdot n - 1$, unde $n \in \{1, 21, 321, 4321, ..., 987654321\}$. Ce observați?
4. Să se completeze locurile libere:

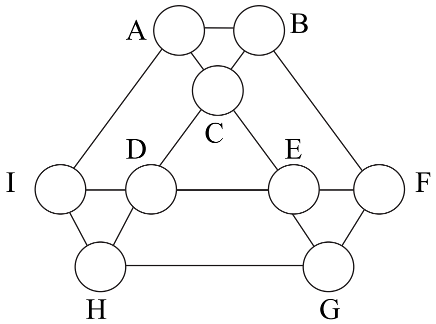
a)

70	57	44	31	18	

b)

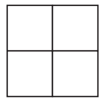
198	184	168		130	108	86	

5. Care dintre numerele următoare nu respectă regula după care sunt formate celelalte: 123, 266, 563, 452, 375, 882, 535, 893, 684, 486, 596?
6. În cele 9 cercuri să se aşeze toate cifrele de la 1 la 9 inclusiv, o singură dată, astfel încât suma cifrelor din vârfurile celor 7 triunghiuri formate să fie aceeaşi (Einstein).

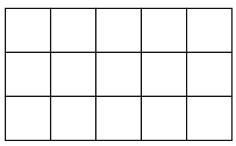


7. Să se împartă conținutul a 11 sticle pline cu suc şi a 11 sticle umplute pe jumătate, în mod egal la trei persoane fără a transfera sucul dintr-o sticlă în alta.
8. Un muncitor execută o piesă în 90 minute, iar ucenicul său în trei ore. În cât timp vor executa împreună piesa?
9. Scrieți primele 12 numere naturale nenule unele după altele, astfel încât diferențele între orice două numere vecine şi diferența pozitivă dintre primul şi ultimul număr să fie 1 sau 2.
10. Se scriu numerele de la 1 la 60 pe un cerc. Se taie numerele din 7 în 7, începând cu primul. La fiecare parcurgere a cercului sunt luate în calcul şi numerele tăiate anterior. Care este ultimul număr ce poate fi tăiat? Există numere ce nu se pot tăia?
11. Aceeaşi problemă ca problema 11, schimbând 60 cu 50 şi 7 cu 6.

12. Pentru construcția unui pătrat cu latura 1 folosim 4 bețe de chibrit de lungime 1. Pentru construcția unui pătrat cu latura 2 folosim 12 bețe de chibrit de lungime 1. Câte bețe de chibrit folosim pentru construcția unui pătrat de lungime 15?



13. Se aruncă o monedă de 4 ori şi apare fața sau stema. Câte cazuri posibile sunt?
14. Câte numere de patru cifre avem în sistemul zecimal?
15. Câte numere de cel mult 5 cifre se pot scrie în sistemul binar?
16. Doi copii scot din bile dintr-o urnă cu suficient de multe bile. Primul scoate două bile, al doilea scoate o bilă, primul scoate 4 bile, al doilea scoate trei bile ş.a.m.d. Când numărul de bile ce trebuie scoase este mai mic decât cel ce trebuia scoase, atunci copilul scoate toate bilele. Ştiind că primul copil a scos 100 de bile, să se afle numărul total de bile.
17. Se consideră numerele 1, 2, 5. Oricare două din cele trei numere pot fi mărite simultan cu câte o unitate. Este posibil ca după 99 astfel de operații să se obțină trei numere egale?
18. Pe un rând sunt aşezate suficient de multe fise de 5 culori. Care este cel mai mic număr de fise care trebuie să fie în rând, astfel încât pentru orice două culori diferite să existe în rând două fise vecine de aceste culori?
19. Împărțiți numerele 1, 2, 3, ..., 15 în 4 grupe, astfel încât suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeaşi.
20. Dintr-o urnă care conține bile cu numerele 2, 3, 7, 8, 9, 12, 18, 24, 26, doi copii au scos câte 4 bile. Se constată că suma numerelor extrase de un copil este de 4 ori mai mică decât suma numerelor extrase de celălalt copil. Ce număr nu poate fi extras?
21. Suma lungimilor a 33 de grinzi de lungimi de 4 m şi 5 m este de 145 m. Câte tăieturi (care acționează separat asupra unei singure grinzi) sunt necesare pentru a obține grinzi de lungime 1 m?
22. Se consideră numărul n = 7654321. Se alege orice număr de două cifre alăturate, se scade câte o unitate din fiecare cifră şi li se schimbă locurile. Care este cel mai mic număr ce se poate obține după efectuarea unor astfel de transformări?
23. Asupra tripletului (A, B, C) se efectuează două tipuri de transformări. Transformarea I) constă în trecerea tripletului (A, B, C) în tripletul (A + 1, B + 1, C + 1), iar transformarea II) constă în trecerea tripletului (A, B, C) în tripletul (A, B – 1, C + 2). Este posibil ca prin astfel de transformări tripletul (5, 6, C) să treacă în tripletul (14, 11, 24)?
24. Câte pătrate sunt în figura de mai jos?



25. În câte moduri se pot aranja 4 cărți pe 3 rafturi?

7.2. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte

Vom nota cu u(n) ultima cifră a numărului natural n. Avem următorul tabel:

u(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(n^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$u(n^3)$	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
$u(n^4)$	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

Observații:
1) $u(n^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$;
2) $u(a) \in \{2, 3, 7, 8\} \Rightarrow a \neq n^2$, $n \in \mathbf{N}$;
3) $u(n^4) \in \{0, 1, 5, 6\}$;
4) $u(a) \in \{2, 3, 4, 7, 8, 9\} \Rightarrow a \neq n^4$, $n \in \mathbf{N}$;
5) Pătratul oricărui număr natural este de forma 4m sau 4m + 1, unde $m \in \mathbf{N}$.
6) Dacă $a = 4m + 2$ sau $a = 4m + 3$, atunci $a \neq n^2$, $n \in \mathbf{N}$.

Avem următorul tabel:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(2^n)$	2	4	8	6	2	4	8	6	2
$u(3^n)$	3	9	7	1	3	9	7	1	3
$u(4^n)$	4	6	4	6	4	6	4	6	4
$u(5^n)$	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$u(6^n)$	6	6	6	6	6	6	6	6	6
$u(7^n)$	7	9	3	1	7	9	3	1	7
$u(8^n)$	8	4	2	6	8	4	2	6	8
$u(9^n)$	9	1	9	1	9	1	9	1	9

Observații:
1) $u(2^n) \in \{2, 4, 6, 8\}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.
2) $u(3^n), u(7^n) \in \{1, 3, 7, 9\}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.
3) $u(5^n) = 5$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.
4) $u(6^n) = 6$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.
5) $u(4^n) \in \{4, 6\}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$.
6) $u(2^n) = \begin{cases} 2, & n = 4k+1 \\ 4, & n = 4k+2 \\ 8, & n = 4k+3 \\ 6, & n = 4k \end{cases}$; $u(9^n) = \begin{cases} 1, & n = 2k+1 \\ 9, & n = 2k \end{cases}$.

Numărul natural a se numește pătrat (respectiv cub) perfect dacă există un număr natural n (respectiv m), astfel încât $a = n^2$ (respectiv $a = m^3$).

Teon din Smirna (secolul al II-lea) a găsit primele exemple de numere care nu sunt pătrate perfecte (respectiv numerele de forma $3n + 2$, $4n + 2$, $4n + 3$, $n \in \mathbf{N}$).

Numerele de forma $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ se numesc numere triunghiulare.

Arhimede din Siracuza (287-212 î.e.n.) ştia că:

a) suma primelor n numere naturale impare este pătrat perfect:

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$;

b) orice număr natural impar este diferența a două pătrate perfecte:

$2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$, $n \in \mathbf{N}$;

c) suma pătratelor primelor numere naturale nenule este:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Nicomah (secolele I-II) ştia că numerele 1, 3 + 5, 7 + 9 + 11, 13 + 15 + 17 + 19, etc. sunt cuburi perfecte, precum şi faptul că orice pătrat perfect este suma a două numere triunghiulare: $a^2 = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{(a-1)\cdot a}{2}$, unde $a \in \mathbf{N}^*$.

Probleme propuse

1. Să se determine mulțimea $A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} + \overline{ba} = n^2, n \in \mathbf{N}\}$.

2. Să se determine mulțimea $B = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} - \overline{ba} = n^2, n \in \mathbf{N}\}$.

3. Să se determine mulțimea $C = \{\overline{abc} \mid \overline{abc} = n^2, \overline{bca} \neq m^2, \overline{cab} = p^2, n, m, p \in \mathbf{N}\}$.

4. Să se determine produsul $a \cdot b \cdot c$, unde $a, b, c \in \mathbf{N}$ şi $a^2 \leq b$, $b^2 \leq c$, $c^2 \leq a$.

5. Să se rezolve în numere naturale ecuațiile:

a) $a^2 + b^2 + c^2 = 9$; b) $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

6. Să se determine mulțimea $A = \{\overline{abc} \mid 11 \cdot (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ba} + \overline{ac} + \overline{cb}) = m^2, m \in \mathbf{N}\}$.

7. Să se determine $n \in \mathbf{N}$ dacă $2^n + 3^n = n^2 + n^3$.

8. Să se determine restul împărțirii la 8 a pătratului unui număr natural impar.

9. Să se determine mulțimile: $A = \{\overline{ab} \mid a + b = a^2\}$, $B = \{\overline{ab} \mid a + b = b^2\}$, $C = \{\overline{ab} \mid a + b = n^2, n \in \mathbf{N}^*\}$.

10. Să se determine ultima cifră a numerelor:

a) $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 999 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot 99$;

b) $B = (1 + 2 + ... + 999) - (1 + 3 + 5 + 7 + ... + 999)$.

11. Să se determine pătratele perfecte de forma $\overline{aabb}$.

12. Să se determine un număr de două cifre ştiind că prin ridicarea sa la cub se obține un număr de 6 cifre scris doar cu cifrele 6, 7, 8.

13. Să se determine cel mai mic număr natural de două cifre pentru care suma dintre pătratul său şi cubul său este pătrat perfect.

14. Fie $n \in \mathbf{N}^*$. Să se determine $x \in \mathbf{N}^*$ dacă numărul $a = 2^x + 4^n$ este pătrat perfect.

15. Să se determine numerele naturale a şi n, pentru care $2^a + 1 = n^2$.

SOLUȚII

Capitolul 1. Numere naturale

1. Din S(n) = 1 + 2 + ... + (n – 1) + n şi S(n) = n + (n – 1) + ... + 2 + 1, prin adunare avem: 2 · S(n) = (1 + n) + (2 + (n – 1)) + ... + ((n – 1) + 2) + (n + 1), de unde rezultă că S(n) = n(n + 1) : 2, ∀ n ∈ **N***.

2. a) Deoarece U ≠ I, atunci avem U ≠ 0, U ≠ 5. Dacă U = 1 avem I = 3. Cum T = 2 · · N + G sau T = 2 · N + G + 1, N ≥ 2, G ≥ 2, N ≠ G ≠ 3, rezultă că T ≥ 8. Avem E ≥ 5, E ≤ 7 şi deci T = 9. Atunci 2C + L = 9 sau 2C + L = 19. Dacă L = 5 avem C = 2 sau C = 7. Dacă C = 2 avem E = 7 şi apoi 2N + G = 8 (imposibil). Dacă C = 7, atunci E = = 6, 2N + G = 8, N = 2, G = 4. Luăm apoi cazurile U ∈ {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}.

3. Operațiile sunt:

$$\begin{array}{r|l} 18263 & 127 \\ \underline{127} & 143 \\ =556 & \\ \underline{508} & \\ =483 & \\ \underline{381} & \\ 102 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15336 & 36 \\ \underline{144} & 426 \\ ==93 & \\ \underline{72} & \\ 216 & \\ \underline{216} & \\ === & \end{array}$$

4. Dacă a > 3b + 2 avem a ≥ 3b + 3 şi deci 4a ≥ 12b + 12 > 12b + 11.

5. Avem 1 ≤ I ≤ 9, D – R = C · I = 15 = 15 · 1 = 5 · 3 = 3 · 5. Dacă I = 1 rezultă C = 15, R = 0, D = 15. Dacă I = 3, rezultă C = 5, R ∈ {0, 1, 2}. Dacă I = 5, avem C = 3, R ∈ ∈ {0, 1, 2, 3, 4} etc. Problema are 9 soluții.

6. Luăm cazul b + c = 3a şi din abc = 2(a + b + c) = 8a rezultă bc = 8. Avem soluțiile (27, 1, 8); (18, 2, 4); (18, 4, 2); (27, 8, 1). Din cazurile a + c = 3b şi a + b = 3c mai obținem încă 8 soluții.

7. S(n) = (2 · 1 – 1) + (2 · 2 – 1) + (2 · 3 – 1) + ... + (2 · n – 1) = 2(1 + 2 + ... + n) – n = = n(n + 1) – n = n^2.

8. a) Avem 2x + 4x + 6x + ... + 200x = 2x(1 + 2 + ... + 100) = 10100x şi deci x = 5; b) Avem (1 + 3 + 5 + ... + 201)x = 101^2x şi deci x = 4.

9. Fie $\overline{ab} = 4\cdot\overline{ba} + r$, r ∈ {0, 1, 2, 3}. Obținem 6a = 39b + r. Cum 6a ≤ 54, rezultă b = = 1 şi avem 6a = 39 + r, de unde r = 3, a = 7.

10. Din $\overline{abc} = n\cdot\overline{cba} + r, r < \overline{cba}$. Luăm n = 9 şi atunci avem $\overline{9b1} = 9\cdot\overline{1b9} + r$ ⇔ 901 + + 10b = 981 + 90b + r (imposibil). Pentru n = 8 avem 901 + 10b = 872 + 90b + r ⇔ ⇔ 70b + r = 29 (imposibil). Pentru n = 7 avem 901 + 10b = 763 + 70b + r ⇔ 238 = = 60b + r. Dacă b = 0, atunci r = 238 > $\overline{cba} = 109$. Dacă b = 1, atunci r = 178 > $\overline{cba}$ = = 119. Dacă b = 2, atunci r = 118 < $\overline{cba} = 129$. Cel mai mare cât este 7 şi numărul este 921.

11. Din 100a + 10b + 2 + 100c + 10d + 3 = 200 + 10b + a + 300 + 10d + c rezultă că 99(a + c) = 495 şi deci a + c = 5. Pentru (a, c) avem 4 perechi: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1). Cum b, d pot fi date de orice cifră, problema are $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ soluţii.

12. Din $\overline{ab} + \overline{mn} = 117$ şi $\overline{ba} + \overline{nm} = 162$, rezultă că 10(a + m) + b + n = 117, 10(b + + n) + a + m = 180. Obţinem a + m = 10, b + n = 17. Pentru (a, m) avem soluţiile (1, 9), (2, 8), ..., (8, 2), (9, 1), iar pentru (b, n) avem soluţiile (8, 9), (9, 8). Numărul perechilor $(\overline{ab}, \overline{mn})$ este 18.

13. Nu putem avea ambele numere de trei cifre deoarece $\overline{abc} + \overline{mnp} \geq \overline{1b1} + \overline{1n1} \geq 202 > > 171$. Dacă luăm $\overline{abc} + \overline{mn} = 171$ şi $\overline{cba} + \overline{nm} = 405$, obţinem $\overline{bc} + \overline{mn} = 71$, a = 1, $10\overline{cb} + \overline{nm} = 404$, m = 4. Obţinem $\overline{bc} + n = 31$, $n + \overline{cb} = 40$ şi deci c = b + 1, 11b + n = = 30. Atunci b = 2, n = 8, c = 3. Numerele sunt 123 şi 48.

14. a) A = (1002 + 1001 – 1000 – 999) + (998 + 997 – 996 – 995) + ... + (6 + 5 – 4 – – 3) + (2 + 1) = $4 \cdot 250 + 3$ = 1003; b) B = (1000 + 999 – 998 – 997) + (996 + 995 – – 994 – 993) + ... + (4 + 3 – 2 – 1) = $4 \cdot 250$ = 1000.

15. Avem $n \geq 2$. Din n(10x + y) = 100x + y rezultă 10x(10 – n) = y(n – 1). Avem $n \leq \leq 10$. Dacă n = 10, atunci y = 0, $x \in \{1, 2, 3, ..., 8, 9\}$. Pentru $n \leq 5$ nu avem soluţii. Soluţiile (n, x, y) sunt (6, 1, 8), (7, 1, 5), (9, 4, 5).

16. Avem $100 \cdot a = \overline{bc}^2$ şi deci $\overline{abc} \in \{110, 420, 930\}$.

17. Avem n = 16a + b, $b \leq 5$, n = 25b + a, $a \leq 24$. Din 16a + b = 24b + a rezultă 3a = = 5b = 15p şi deci a = 5p, b = 3p. Avem $p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ şi atunci $n \in \{0, 83, 166, 249, 332\}$.

18. a) Avem 11(x + y + z) = 100x + 10y + z $\Leftrightarrow$ 10z + y = 89x $\Leftrightarrow$ $\overline{zy} = 89 \cdot x$. Atunci $\overline{xyz}$ = 198; b) Nu putem avea decât $x \leq 2$. Dacă x = 2, rezultă 220y + z + t = 995. Pentru $y \leq 4$, avem 220y + z + t $\leq$ 898 < 995, iar pentru $y \geq 5$ rezultă 220y + z + t $\geq$ $\geq$ 1100 > 995. Rămâne x = 1 şi atunci 220y + z + t = 1995. Nu putem avea decât y = 9 şi atunci z + t = 15, de unde $(z, t) \in \{(6, 9), (7, 8), (8, 7), (9, 6)\}$.

19. Dacă $a \geq 2$ avem $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d \geq 2110 + 110 + 10 > 2000$. Dacă a = 2 rezultă 100b + 15c + 2d = 500. Pentru $b \leq 3$ avem A = 100b + 15c + 2d $\leq$ 453 < 500 şi pentru $b \geq 5$ avem A > 500. Dacă b = 4, atunci rezultă 15c + d = 100, de unde d = 5 şi c = 6.

20. Avem x(y – 3) = y. Dacă x = 0 atunci y = 0. Pentru $y \in \{1, 2, 3\}$ nu avem soluţie. Atunci x(y – 3) – (y – 3) = 3 şi deci (x – 1)(y – 3) = $1 \cdot 3$. Atunci $(x, y) \in \{(2, 6), (4, 4)\}$.

21. a) a + b + c = 17 + 19 + 18 = 54; b) 16 + 11 + 15 = 42.

22. x nu poate fi cifră. Dacă notăm cu n numărul cifrelor lui x, pentru n = 2 rezultă $39 \cdot x = 576$ (imposibil). Pentru n = 3 rezultă $399 \cdot x = 5976$ (imposibil). Pentru n = 4 rezultă 3999x = 59976. Pentru n = 5 rezultă x = 15384.

23. Dacă a = 1, atunci avem b = 9 şi rezultă $1690 - \overline{cd} = 1898$ (fals). Dacă $a \geq 3$, avem $\overline{abcd} - \overline{abc} - \overline{ab} - a > 1898$. Rezultă că avem a = 2. Rămâne $\overline{bcd} - \overline{bc} - b = 120$, adică 89b + 9c + d = 120. Avem b = 1 şi 9c + d = 31. Obţinem $\overline{abcd} = 2134$.

24. Avem A = 211a + 121c + 112b. Atunci maxA = $211 \cdot 9 + 121 \cdot 8 + 112 \cdot 7$ = 3657

şi $\min A = 211 \cdot 1 + 121 \cdot 2 + 112 \cdot 3 = 789$.
25. Notând numerele cu a, a + 1, a + 2, avem $(a + 1)(a + 2) - a \cdot (a + 1) = 52$. Obținem $2 \cdot (a + 1) = 52$. Numerele sunt 25, 26, 27.
26. Fie numerele $\overline{abcd}$ cu $1 \le a < b < c < d$. Avem numerele 1239, 1248, 1257, 1347, 1356, 2346.
27. 123; 11222; 11133; 11111223 etc.
28. Împărțitorul poate fi 8 sau 9. Dacă împărțitorul este 8, numărul este de forma $8n + 7$. Obținem numerele $8 \cdot 1 + 7 = 15$, respectiv $8 \cdot 11 + 7 = 95$. Dacă numărul este de forma $9n + 7$, obținem numerele $9 \cdot 1 + 7 = 16$, respectiv $9 \cdot 10 + 7 = 97$.
29. Numerele sunt $9a + b$, $10a + b$, $11a + b$, unde $b \le 8$. Avem $30a + 3b = 129$, de unde $a = 4$, $b = 3$. Numerele sunt 39, 43, 47.
30. $(50 \cdot 4 + 0) + (50 \cdot 4 + 1) + (50 \cdot 4 + 2) + (50 \cdot 4 + 3) + ... + (50 \cdot 4 + 49) = 50 \cdot 4 \cdot 50 + (1 + 2 + ... + 49) = 10825$.
31. Numerele sunt de forma $11 \cdot a + a = 12a$, unde $1 \le a \le 8$. Suma este $12 \cdot (1 + 2 + ... + 8) = 432$.
32. Numerele sunt de forma $13 \cdot n + 3n = 16n$, unde $3n \le 12$. Suma este $16 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 160$.
33. Avem $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Deci 15! se împarte exact la 1001. Restul este $6! = 720$.
34. Numerele au forma $n = 4a + 3 = 5b + 4 = 6c + 5$. Atunci $n + 1 = 4(a + 1) = 5(b + 1) = 6(c + 1) = 60m$, $m \in \mathbf{N}^*$. Obținem $n = 60m - 1$ cu $1 \le m \le 16$. Suma numerelor este $60 \cdot (1 + 2 + ... + 16) - 16 = 8144$.
35. Numerele sunt de forma $25 \cdot 3a + a$, unde $a \le 24$. Din $10 \le 76a \le 999$ rezultă $1 \le a \le 13$. Suma este $76 \cdot (1 + 2 + ... + 13) = 7007$.
36. Avem $a + b = 2n + 1$; $a = bm + n + 1$. Avem $a \ge n + 1$, $b \le n$. Obținem $m = 0$, $a = n + 1$, $b = n$.
37. Din $5a + 1 = 4b + 2$ rezultă $a = 4(b - a) + 1 = 4n + 1$. Numerele sunt de forma $5(4n + 1) + 1 = 20n + 6$. Aceste numere sunt 26, 46, 66, 86.
38. $\overline{abc} = \overline{ab} \cdot (a+1) + a \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{ab} + c = \overline{ab} \cdot (a+1) + a \Leftrightarrow (9 - a) \cdot \overline{ab} = a - c$. Dacă $a \ne 9$ rezultă $(9 - a) \cdot \overline{ab} > a - c$. Avem $a = c = 9$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
39. Avem $n - 4 = 10a = 12b = 15c = 60d$ şi deci $n = 60d + 4$. Din $100 \le n \le 999$ rezultă că $2 \le d \le 16$.
40. Avem $1002 = 2 \cdot 501$ şi $1001! = 2 \cdot 501m$, $m \in \mathbf{N}^*$. Restul căutat este restul împărțirii numărului $1 + 2 + ... + 1002 = 501 \cdot 1003 = 501 \cdot 1002 + 501$ la 1002, adică este 501.
41. Dacă avem $a = b \ne 0$, atunci $S = 2 \cdot a$, $D = 0 = 0 \cdot a$ şi ambele resturi sunt nule. Fie $a > b$. Atunci există $c, r \in \mathbf{N}$ unice astfel încât $a = bc + r$, $r < b$. Avem $S = bc + r + b = b \cdot (c + 1) + r$, $D = a - b = b(c - 1) + r$. Diferența resturilor cerute este $r - r = 0$.
42. Avem $A = (1100 - 11)(x - y) = 1089(x - y) = 1089a$, $1 \le a \le 8$, iar $B = (1001 - 110)(x - y) = 891a$. Atunci $1089a = 891 \cdot a + 198a$. Câtul este 1 şi restul este 198a.
43. Dacă n are 2k cifre, $k \in \mathbf{N}^*$, cum $5n < 10n$, rezultă că 5n are tot 2k cifre sau 2k + 1 cifre (cât are 10n). Cum suma cifrelor celor două numere este număr par, rezultă că 5n are tot 2k cifre şi atunci prima cifra a lui n este obligatoriu 1.

CUPRINS

Capitolul 1. NUMERE NATURALE 5
Probleme propuse 6

Capitolul 2. MULȚIMI 11
Probleme propuse 12

Capitolul 3. DIVIZIBILITATE 15
Probleme propuse 17

Capitolul 4. NUMERE RAȚIONALE POZITIVE 25
Probleme propuse 27

Capitolul 5. FRACȚII ZECIMALE 34
Probleme propuse 35

Capitolul 6. ECUAȚII. INECUAȚII. INEGALITĂȚI 37

Capitolul 7. TEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ 47
7.1. Probleme distractive. Probleme de numărare 47
7.2. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte 49
Probleme propuse 50
7.3. Sisteme de numerație. Proprietatea fundamentală a sistemelor de numerație ... 52
Probleme propuse 53
7.4. Principiul cutiei (principiul lui Dirichlet). Metoda reducerii la absurd 54
Probleme propuse 54
7.5. Criterii de divizibilitate 56
Probleme propuse 57
7.6. Numărul divizorilor şi suma divizorilor unui număr natural dat 59
Probleme propuse 59
7.7. Ecuații în numere naturale 61
Probleme propuse 61
7.8. Mulțimi. Partiții ale unei mulțimi 62
Probleme propuse 62

SOLUȚII 65
Capitolul 1. Numere naturale 65
Capitolul 2. Mulțimi 72
Capitolul 3. Divizibilitate 75
Capitolul 4. Numere raționale pozitive 91
Capitolul 5. Fracții zecimale 102
Capitolul 6. Ecuații. Inecuații. Inegalități 106
Capitolul 7. Teme pentru cercurile de matematică 124

BIBLIOGRAFIE 142