Petre Năchilă

BACALAUREAT

Matematică

*M*_Tehnologic

- **Breviar teoretic**
- **1000 de itemi de antrenament**
- **20 de modele de teste cu rezolvări complete**
- **40 de modele de teste pregătitoare**

Editura NOMINA

A. TEME RECAPITULATIVE

Capitolul 1

Algebră, geometrie, trigonometrie. Clasele IX-X

1.1. Mulțimi de numere. Elemente de logică matematică

- **Mulțimi finite. Reguli de numărare**

O mulțime este *finită* dacă are n elemente, $n \in \mathbb{N}$.

O mulțime este infinită dacă nu este finită.

O mulțime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte *mărginită* dacă $\exists\ m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq x \leq M$, $\forall\ x \in A$.

Regula sumei: Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect B poate fi ales în n moduri, atunci alegerea „lui A sau B" poate fi realizată în $(m + n)$ moduri.

Regula produsului: Dacă un obiect A se poate alege în m moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în n moduri, atunci alegerea perechii (A, B) în această ordine, poate fi realizată în $m \cdot n$ moduri.

- **Modulul unui număr real**: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

a) $|x| \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$;

b) $|-x| = |x|,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$;

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ y \in \mathbb{R}^*$;

e) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

f) $|x| = a,\ a > 0 \Leftrightarrow x = \pm a$;

g) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a],\ a > 0$;

h) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ sau $x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty),\ a > 0$.

- **Partea întreagă şi partea fracţionară**

Se numeşte *partea întreagă a* numărului real x, notată $[x]$, cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x. Deci $[x] \in \mathbb{Z}$ şi $[x] \le x < [x] + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Se numeşte *partea fracţionară a* numărului real x, notată cu $\{x\}$, diferenţa dintre x şi partea lui întreagă. Deci $\{x\} \in [0, 1)$ şi $\{x\} = x - [x]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Proprietăţi:

a) $x \in [k, k + 1);\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x] = k$;

b) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{x\} = 0$;

c) $[x + n] = [x] + n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$;

d) $\{x + n\} = \{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$;

e) $x - 1 < [x] \le x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

- **Inegalităţi remarcabile** (pentru două numere reale)

a) Inegalitatea mediilor: $\forall\, a, b > 0$ avem:

$$\min(a, b) \le \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \max(a, b);$$

b) Inegalitatea Cauchy–Buniakovski–Schwartz:

$a, b, x, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$, $(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$;

c) Inegalitatea lui Bernoulli: $\alpha > 0$, $r > -1$, $r \in \mathbb{Q}$, $(1 + \alpha)^r > 1 + r\alpha$.

- **Principiul inducţiei matematice**

Propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}$ dacă sunt verificate condiţiile:

1. Propoziţia $\mathrm{p}(n)$ este adevărată pentru $n = 0$;
2. Din presupunerea că $\mathrm{p}(n)$ este adevărată pentru $n = k$, $k \in \mathbb{N}$ rezultă că este adevărată pentru $n = k + 1$.

Etapele inducţiei matematice:

I. *Verificarea propoziţiei*: pentru $n = 0$ verificăm dacă $p(0)$ este adevărată;

II. *Demonstraţia*: $\mathrm{p}(k) \to \mathrm{p}(k + 1)$. Presupunem că $\mathrm{p}(k)$ este adevărată şi demonstrăm că $p(k + 1)$ este de asemenea adevărată. Dacă cele două etape sunt validate, atunci are loc

Concluzia: Propoziţia $p(n)$ este adevărată, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Formule care pot fi demonstrate prin inducţie matematică:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Formule de calcul prescurtat**

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$; $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$;

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

- **Sume remarcabile**

$1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$; $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$;

$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$;

$1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$; $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

PROBLEME PROPUSE

1. a) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fracțiile $\dfrac{3n+7}{2n+5}$ și $\dfrac{2\cdot 3^n+5}{3^{n+1}+6}$ sunt ireductibile.

b) Generalizare.

2. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fracțiile $F_1=\dfrac{2^{n+3}+2^{n+1}+2^n}{3^{n+5}+2\cdot 3^{n+3}}$, $F_2=\dfrac{n^2+n+2}{3^2+9n+4}$ sunt reductibile.

3. Calculați:

a) $\sqrt{162}-\sqrt{242}+\sqrt{288}-\sqrt{98}$; b) $\sqrt{320}+\sqrt{20}-\sqrt{500}+\sqrt{125}$.

4. Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care fracțiile sunt reductibile:

a) $\dfrac{n-3}{3n-2}$; b) $\dfrac{n+1}{n^2-3n+1}$.

5. Determinați cifrele a, b pentru care următoarele numere sunt iraționale pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sqrt{5n+a}$; b) $\sqrt{4n+b}$.

6. Fie $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $b=\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calculați $a + b$ și $\dfrac{b}{a}-\sqrt{3}$.

7. Demonstrați că $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}\in\left(3,\ 2\sqrt{3}\right)$.

B. TESTE

Capitolul 4

20 de teste pregătitoare pentru examenul de bacalaureat cu rezolvare completă

TESTUL 1

SUBIECTUL I

1. $1+5+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}=6$. **2.** $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-3 \Rightarrow |1-(-3)|=4$.
3. $2^{2x}\cdot 2^{3x+3}=2^{8x} \Rightarrow 5x+3=8x \Rightarrow x=1$. **4.** 135, 153, 351, 315, 513, 531. **5.** $a+1=2a-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=2$. **6.** $4\sin^2 x+12\sin x\cos x+9\cos^2 x+9\sin^2 x-12\sin x\cos x+4\cos^2 x=13(\sin^2 x+$
$+\cos^2 x)=13$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $\det A(2)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$; b) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}x & x+1\\ x-1 & x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y & y-1\\ y-1 & y\end{pmatrix}=$
$=\begin{pmatrix}2xy-x-y+1 & 2xy-x-y\\ 2xy-x-y & 2xy-x-y+1\end{pmatrix}=A(2xy-x-y+1)$; c) $A(x)\cdot A(y)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)=$
$=A(2xy-x-y+1)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)=A(\alpha)=A(a)$, unde $\alpha=2\cdot\frac{1}{2}(2xy-x-y+1)-(2xy-x-y+1)-$
$-\frac{1}{2}+1=a \Rightarrow a=\frac{1}{2}$. **2.** a) $6*2=6+2-\frac{6\cdot 2}{4}=5$; b) $x*(4x)=x+4x-x^2=6 \Rightarrow x^2-5x+$
$+6=0 \Leftrightarrow x\in\{2,3\}$; c) Legea este comutativă şi avem $x*y=-\frac{1}{4}(x-4)(y-4)+4$. Căutăm elementul absorbant a (adică $x*a=a*x=a$, $\forall x$). Avem $a=4$. Fie $A=a*4*b$, unde $a=$
$=1*2*3$, $b=5*6*\ldots*2025$. Atunci $A=(a*4)*b=4*b=4$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $f'(x)=3'+\left[(x-3)e^{-x}\right]'=(x-3)(-e^{-x})-e^{-x}=(4-x)e^{-x}=\frac{4-x}{e^x}$;

b) $f''(x)=\frac{-e^x-e^x(4-x)}{e^{2x}}=\frac{x-5}{e^x}\geq 0$, $\forall x\geq 5 \Rightarrow f$ convexă pe $[5,\infty)$; c) Avem tabelul:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		+ + +	0	− − −	
$f(x)$		$\nearrow$	$3+\frac{1}{e^4}$	$\searrow$	

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem:
$\frac{x-3}{e^x}\leq 3+\frac{1}{e^4} \Leftrightarrow x-3\leq e^{x-4}$.

2. a) $\int_0^1(6x^2+4x+1)\,dx=2x^3+2x^2+x\Big|_0^1=5$; b) $F'(x)=f(x)=2x^2+(2x+1)^2>0$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow F$ strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; c) $\int_1^a\left(6x+4+\frac{1}{x}\right)dx=(3x^2+4x+\ln x)\Big|_1^a=3a^2+4a-7=13+\ln a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a=2$.

TESTUL 2

SUBIECTUL I

1. $S_3 = 2 + 4 + 6 = 12$. **2.** $x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow x \in \{1, 9\}$. **3.** $5^x(5 - 3) = 2 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$.
4. $(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow p = \dfrac{1}{10}$. **5.** Fie $ABCD$ paralelogram. Avem $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| =$
$= \sqrt{l^2 + l^2 - 2l^2\cos 120^\circ} = l\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. **6.** $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2(x + \pi) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $\det A(1) = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 12 = 2$; b) $A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1+4a & -6a \\ 2a & 1-3a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+4b & -6b \\ 2b & 1-3b \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 1+4(ab+a+b) & -6(ab+a+b) \\ 2(ab+a+b) & 1-3(ab+a+b) \end{pmatrix} = A(ab + a + b)$; c) $A(2(mn + m + n)) = A(2) \Leftrightarrow mn +$
$+ m + n = 1 \Leftrightarrow (m + 1)(n + 1) = 2 \Leftrightarrow (m, n) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$. **2.** a) $x \circ y = 2y(x - 1) - 2(x - 1) +$
$+ 1 = 2(x - 1)(y - 1) + 1,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$; b) $2(x - 1)^2 + 1 \le 9 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \le 4 \Leftrightarrow x - 1 \in [-2, 2] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in [-1, 3]$; c) Prin inducție avem $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = 2^{n-1}(x_1 - 1)(x_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (x_n - 1)$. Observăm că $1 \circ x = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, şi deci $1^n \circ x = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Luăm $x = 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2025^n$ şi deci rezultatul este 1.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $f'(x) = 1 - \dfrac{ex^{e-1}}{x^e} = 1 - \dfrac{e}{x} = \dfrac{x - e}{x}$; b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$; c) Avem $e^x \ge x^e$ pentru $x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \ge \ln x^e \Leftrightarrow f(x) \ge 0$. Din tabelul de mai jos rezultă că $x = e$ este unica soluție.

x	0		e		
$f'(x)$	|||| |	$-\ -$	0	$+\ +$	
$f(x)$	|||| |	$\searrow$	e m	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - 1)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - x\right|_0^3 = 6$; b) Avem $f(x) \ge 0$ pe $[1, \infty)$ şi deci $A = \displaystyle\int_1^2 (x^2 - 1)e^x\,dx = F(x)\Big|_1^2$.
Fie $\int (x^2 - 1)e^x\,dx = (ax^2 + bx + c)e^x$. Prin derivare $\Rightarrow (x^2 - 1)e^x = (ax^2 + bx + c + 2ax + b)e^x$,
$\forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 1, b = -2, c = 1 \Rightarrow A = (x - 1)^2 e^x\Big|_1^2 = e^2$; c) $\displaystyle\int_2^a \frac{2xe^x}{(x^2 - 1)e^x}\,dx = \int_2^a \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1}\,dx =$
$= \ln(x^2 - 1)\Big|_2^a = \ln\dfrac{a^2 - 1}{3} = \ln 8$. Din $\dfrac{a^2 - 1}{3} = 8,\ a > 1 \Rightarrow a = 5$.

TESTUL 3

SUBIECTUL I

1. $7 + \sqrt{7} - \sqrt{7} = 7$. **2.** $y = f(0) = 8 \Rightarrow A(0, 8)$. **3.** $x^2 + 9 = 25,\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \{\pm 4\}$.
4. $\left(\dfrac{100}{100} - \dfrac{40}{100}\right) \cdot x = 300 \Rightarrow x = 500$. **5.** Mijlocul lui (AB) este $M(0, 2) \Rightarrow \sqrt{(0-0)^2 + (6-2)^2} = 4$.

6. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $\det A=\begin{vmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{vmatrix}=-30+30=0$; b) Avem $A^2=A$ şi atunci $M(a)\cdot M(b)=I_2+aA+abA^2=$ $=I_2+(a+b+ab)A=M(ab+a+b)$; c) $\sum_{k=1}^{2025}M(k)=\sum_{k=1}^{2025}(I_2+kA)=2025I_2+2025\cdot 1013A=$ $=2025(I_2+aA)\Leftrightarrow a=1013$. **2.** a) $f(1)=m+2-m-2=0$; b) $3x^3+2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2(3x+2)-(3x+2)=0\Leftrightarrow(3x+2)(x^2-1)=0\Rightarrow x\in\left\{\pm 1,-\frac{2}{3}\right\}$; c) $-4=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=$

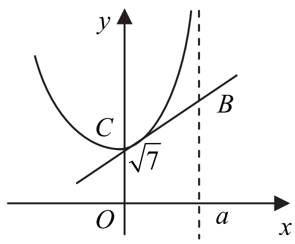
$=\frac{-\frac{m}{m}}{\frac{2}{m}}\Leftrightarrow m=8$.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$; b) $f''(x)=6x\geq 0$ pentru $x\geq 0\Rightarrow f$ convexă pe $[0,\infty)$; c) Din tabelul de mai jos rezultă $f(x)\leq 7$, $\forall\, x\in(-\infty,1]$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+\ +\ +$	0	$-\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	
			M		m		

2. a) $\int_0^1(3x^2+6x+7)\,dx=(x^3+3x^2+7x)\Big|_0^1=11$; b) $\int_{-1}^1\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+7}}\,dx=3\int_{-1}^1\left(\sqrt{3x^2+6x+7}\right)'dx=$ $=3\sqrt{3x^2+6x+7}\Big|_{-1}^1=6$; c) Tangenta la graficul lui f în $C\left(0,\sqrt{7}\right)$ are ecuația $y=\frac{3x}{\sqrt{7}}$. Avem $A(a,0)$, $B\left(a,\frac{3a}{\sqrt{7}}\right)$. Atunci avem



$\int_0^1 f(x)\,dx=A_{OABC}=\frac{a\left(\sqrt{7}+\frac{3a}{\sqrt{7}}\right)}{2}>\frac{a\left(\sqrt{7}+\sqrt{7}\right)}{2}=a\sqrt{7}$.

TESTUL 4

SUBIECTUL I

1. $n(n+2)<14$, $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\in\{0,1,2\}\Rightarrow 0+1+2=3$. **2.** $f(0)=1\Leftrightarrow b=1$; $f(x+1)=ax+$ $+a+b=ax+b+2\Rightarrow a=2$. **3.** $(x+5)^2-9>0\Leftrightarrow(x+8)(x+2)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-8)\cup(-2,\infty)$. **4.** $A_5^2=20$. **5.** M mijlocul lui $(BC)\Rightarrow M(1,4)$. Fie $N=\text{sim}_M A$. Atunci $x_N=2x_M-x_A=2$, $y_N=$ $=2y_M-y_A=6$. **6.** $EF=2\cdot 6-(4+5)=3\Rightarrow \text{m}(\sphericalangle E)=90°$, deoarece $EF^2+DE^2=DF^2$ şi deci $\sin D=\frac{EF}{DF}=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2$;

b) $A\cdot A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 & x \\ 0 & -x+y & x \\ x & -x & y \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1, y = 2$;

c) $B = A + I_3 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A + I_3\right)^{-1} = B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. a) $2 \circ 9 = 2^{2\log_3 9} = 2^{2\cdot 2} = 16$; b) $x \circ 3 = x^{2\log_3 3} = x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$; c) $x \circ y = \left(x^{\log_3 y}\right)^2 = \left(y^{\log_3 x}\right)^2 = y^{2\log_3 x} = y \circ x \Rightarrow$ „$\circ$” comutativă.

SUBIECTUL al III-lea

1. a) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$; b) Din tabelul de mai jos rezultă că f este descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ şi $(1, 2)$ şi strict crescătoare pe $(2, \infty)$;

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -$	$\vert$	$-\ -$	0	$+\ +$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \vert +\infty$	$\searrow$	e^2 m	$\nearrow$	$+\infty$

c) Pentru $x \in (1, \infty)$ avem $f(x) \ge e^2 \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x-1} \ge e^2 \Leftrightarrow e^{x-2} - x + 1 \ge 0$.

2. a) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\, dx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$

$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$; c) $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$= \dfrac{\pi(\pi-2)}{8}$.

TESTUL 5

SUBIECTUL I

1. $4 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4 \in \mathbb{N}$. **2.** $a^2 - a + 2 = a + 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$. **3.** Avem $2x^2 - 6x + 5 > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Din $2x^2 - 6x + 5 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. **4.** $C_5^3 \cdot 3! = 10 \cdot 6 = 60$ numere. **5.** $m_{AB} = \dfrac{0-1}{3-2} = -1$; $M\left(1, \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow d: y - \dfrac{1}{2} = -(x-1) \Leftrightarrow y = -x + \dfrac{3}{2}$. **6.** $\sin^2 x + 49\cos^2 x + 14\sin x\cos x + 49\sin^2 x - 14\sin x\cos x + \cos^2 x = 50(\sin^2 x + \cos^2 x) = 50$.

Cuprins