Petre Năchilă Ana Cârstoveanu Ion Nica

MATEMATICĂ M2

Ghid pentru pregătirea examenului de Bacalaureat

- **Itemi de antrenament**
- **99 de teste**
- **Modele de subiecte date în perioada 2014-2019**

Editura NOMINA

PROGRAMA DE EXAMEN MATEMATICĂ – BACALAUREAT

PROGRAMA *M_şt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

CLASA a IX-a – 4 ore / săpt. (TC+CD)

Mulţimi şi elemente de logică matematică • Mulţimea numerelor reale: operaţii algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracţionară a unui număr real; operaţii cu intervale de numere reale; • Propoziţie, predicat, cuantificatori; • Operaţii logice elementare (negaţie, conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, echivalenţă), corelate cu operaţiile şi cu relaţiile dintre mulţimi (complementară, intersecţie, reuniune, incluziune, egalitate); raţionament prin reducere la absurd; • Inducţia matematică.
Şiruri • Modalităţi de a defini un şir; şiruri mărginite, şiruri monotone; • Şiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcţie de un termen dat şi raţie, suma primilor n termeni ai unei progresii; • Condiţia ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru $n \geq 3$.
Funcţii; lecturi grafice • Reper cartezian, produs cartezian, reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulţimi numerice; condiţii algebrice pentru puncte aflate în cadrane; drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$, cu $m \in \mathbb{R}$. • Funcţia: definiţie, exemple, exemple de corespondenţe care nu sunt funcţii, modalităţi de a descrie o funcţie, lecturi grafice. Egalitatea a două funcţii, imaginea unei mulţimi printr-o funcţie, graficul unei funcţii, restricţii ale unei funcţii; • Funcţii numerice ($F = \{f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}\}$); reprezentarea geometrică a graficului: intersecţia cu axele de coordonate, rezolvări grafice ale unor ecuaţii şi inecuaţii de forma $f(x) = g(x)$ ($\leq, <, >, \geq$); proprietăţi ale funcţiilor numerice introduse prin lectură grafică: mărginirea, monotonie; alte proprietăţi: paritate, imparitate, simetria graficului faţă de drepte de forma $x = m$, $m \in \mathbb{R}$, periodicitate; • Compunerea funcţiilor; exemple pe funcţii numerice.
Funcţia de gradul I • Definiţie; • Reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$; • Interpretarea grafică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei: monotonie şi semnul funcţiei; studiul monotoniei prin semnul diferenţei $f(x_1) - f(x_2)$ (sau prin studierea semnului raportului $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$); • Inecuaţii de forma $ax + b \leq 0$ ($<, >, \geq$), studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale; • Poziţia relativă a două drepte; sisteme de ecuaţii de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$. • Sisteme de inecuaţii de gradul I.
Funcţia de gradul al II-lea • Reprezentarea grafică a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, intersecţia graficului cu axele de coordonate, ecuaţia $f(x) = 0$, simetria faţă de drepte de forma $x = m$, cu $m \in \mathbb{R}$. • Relaţiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$, $s, p \in \mathbb{R}$.

Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea • Monotonie; studiul monotoniei prin semnul diferenței $f(x_1) - f(x_2)$ sau prin rata creșterii/descreșterii: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, punct de extrem, vârful parabolei; • Poziționarea parabolei față de axa Ox, semnul funcției, inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($\geq, <, >$), cu a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, studiate pe $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale, interpretare geometrică: imagini ale unor intervale (proiecțiile unor porțiuni de parabolă pe axa Oy); • Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă: rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$, $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$.
Vectori în plan • Segment orientat, vectori, vectori coliniari; • Operații cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăți ale operației de adunare, înmulțirea cu scalari, proprietăți ale înmulțirii cu scalari, condiția de coliniaritate, descompunerea după doi vectori dați, necoliniari și nenuli.
Coliniaritate, concurență, paralelism – calcul vectorial în geometria plană • Vectorul de poziție al unui punct; • Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiții de paralelism); • Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi (concurența medianelor unui triunghi); • Teorema lui Menelau, teorema lui Ceva.
Elemente de trigonometrie • Cercul trigonometric, definirea funcțiilor trigonometrice: sin, cos : $[0, 2\pi] \to [-1, 1]$, tg : $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$, ctg : $(0, \pi) \to \mathbb{R}$; • Definirea funcțiilor trigonometrice: sin : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, cos : $\mathbb{R} \to [-1, 1]$, tg : $\mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$, cu $D = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, ctg : $\mathbb{R} \setminus D \to \mathbb{R}$, cu $D = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; • Reducerea la primul cadran; formule trigonometrice: $\sin(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\cos(a + b)$, $\cos(a - b)$, $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\sin a + \sin b$, $\sin a - \sin b$, $\cos a + \cos b$, $\cos a - \cos b$ (transformarea sumei în produs). **Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană** • Produsul scalar a doi vectori: definiție, proprietăți. Aplicații: teorema cosinusului, condiții de perpendicularitate, rezolvarea triunghiului dreptunghic; • Aplicații vectoriale și trigonometrice în geometrie: teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor oarecare; • Calcularea razei cercului înscris și a razei cercului circumscris în triunghi, calcularea lungimilor unor segmente importante din triunghi, calcularea unor arii.

CLASA a X-a – 4 ore / săpt. (TC + CD)

Mulțimi de numere • **Numere reale**: proprietăți ale puterilor cu exponent rațional, irațional și real ale unui număr pozitiv, nenul, aproximări raționale pentru numere reale; • Radical de ordin n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) dintr-un număr, proprietăți ale radicalilor; • Noțiunea de logaritm, proprietăți ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operația de logaritmare; • **Mulțimea $\mathbb{C}$.** Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex, operații cu numere complexe. Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și de scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real; • Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali. Ecuații bipătrate.

Funcții și ecuații • Funcția putere: $f: \mathbb{R} \to D, f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ • Funcția radical: $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{R}$ și $n \geq 2$, unde $D = [0, \infty)$ pentru n par și $D = \mathbb{R}$ pentru n impar; • Funcția exponențială $f: \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x$, $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$ și funcția logaritmică $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) =$ $= \log_a x$, $a \in (0, \infty)$, $a \neq 1$; • Funcții trigonometrice directe și inverse; • Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcții inversabile: definiție, proprietăți grafice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă; • Rezolvări de ecuații folosind proprietățile funcțiilor: 1. Ecuații care conțin radicali de ordinul 2 sau 3; 2. Ecuații exponențiale, ecuații logaritmice; 3. Ecuații trigonometrice: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, $\text{tg}\, x = a$, $\text{ctg}\, x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$, $\text{tg}\, f(x) = \text{tg}\, g(x)$, $\text{ctg}\, f(x) = \text{ctg}\, g(x)$. **Notă:** *Pentru toate tipurile de funcții se vor studia: intersecția cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$, reprezentarea grafică prin puncte, simetrie, lectura grafică a proprietăților algebrice ale funcțiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, concavitate / convexitate.*
Metode de numărare • Mulțimi finite ordonate. Numărul funcțiilor $f: A \to B$, unde A și B sunt mulțimi finite; • Permutări – numărul de mulțimi ordonate cu n elemente care se obțin prin ordonarea unei mulțimi finite cu n elemente; – numărul funcțiilor bijective $f: A \to B$, unde A și B sunt mulțimi finite; • Aranjamente – numărul submulțimilor ordonate cu câte m elemente fiecare, $m \leq n$ care se pot forma cu cele n elemente ale unei mulțimi finite; – numărul funcțiilor injective $f: A \to B$, unde A și B sunt mulțimi finite; • Combinări – numărul submulțimilor cu câte k elemente, unde $0 \leq k \leq n$ ale unei mulțimi finite cu n elemente. Proprietăți: formula combinărilor complementare, numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente. • Binomul lui Newton.
Matematici financiare • Elemente de calcul financiar: procente, dobânzi, TVA; • Culegerea, clasificarea și prelucrarea datelor statistice: date statistice, reprezentarea grafică a datelor statistice; • Interpretarea datelor statistice prin parametrii de poziție: medii, dispersia, abateri de la medie; • Evenimente aleatoare egal probabile, operații cu evenimente, probabilitatea unui eveniment compus din evenimente egal probabile. **Notă:** *Aplicațiile vor fi din domeniul financiar: profit, preț de cost al unui produs, amortizări de investiții, tipuri de credite, metode de finanțare, buget personal, buget familial.*
Geometrie • Reper cartezian în plan, coordonate carteziene în plan, distanța dintre două puncte în plan; • Coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector și un număr real; • Ecuații ale dreptei în plan determinate de un punct și de o direcție dată și ale dreptei determinate de două puncte distincte; • Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan, calcularea unor distanțe și a unor arii.

CLASA a XI-a – 3 ore / săpt.

Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare **Matrice** • Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice; • Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu un scalar, proprietăți. **Determinanți** • Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3, proprietăți; • Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan.

SOLUȚII TESTE

• **Testele 1-60 au rezolvare completă.**

Testul 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1. $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$. **2.** $x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x \in \{1, -6\}$. **3.** $f(x) = \log_2 x + \log_4 x$ crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă. Cum $f(64) = 8 \Rightarrow x = 64$. **4.** În mulțimea $A = \{101, 102, \ldots, 145\}$ sunt 45 de elemente, din care $\frac{45}{3} = 15$ sunt divizibile cu 3. Nu se divid cu 3 un număr de 30 elemente. **5.** Fie M mijlocul lui BC. Avem $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $AM = \sqrt{\left(4+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{82}}{2}$. **6.** Fie $M(x, y)$. Avem $(x-3)\vec{i} + (y-4)\vec{j} + (x-1)\vec{i} + (y-5)\vec{j} = 7\vec{i} + 9\vec{j}$, de unde $2x - 4 = 7$; $2y - 9 = 9$, $M\left(\frac{11}{2}, 9\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $A^2 = O_2$; b) $I_2 + (a+1)A + a \cdot O_2 = I_2 \Rightarrow a = -1$; c) Din b) avem $(I_2 + A)^2 = I_2 + 2A$. Prin inducție, presupunând $(I_2 + A)^n = I_2 + nA$, avem $(I_2 + A)^{n+1} = (I_2 + A)(I_2 + nA) = \ldots = I_2 + (n+1)A)$.
2. a) $f(1) = 0 \Rightarrow m^2 + 8m + 15 = 0 \Rightarrow m \in \{-5; -3\}$; b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4m}{4} = 0 \Leftrightarrow m = 0$; c) Dacă $m = -5$, avem ecuația $4x^4 - 20x^3 + 32x^2 - 20x + 4 = 0$, care este ecuație reciprocă (cu două rădăcini: 1 şi –1). Rămâne $4(x+1)(x-1)(x^2 + 5x - 1) = 0$, cu soluțiile $x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$.

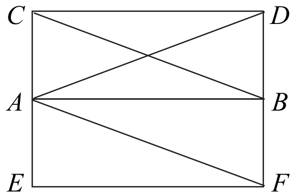
SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $f(x) = 3x^2 + 3x + 1$; $f'(x) = 6x + 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (punct de minim); b) Avem f descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, f crescătoare pe $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, $\min f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; c) $f''(x) = 6 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este convexă pe $\mathbb{R}$. **2.** a) $\int_1^{\sqrt{e-1}} f(x)\,dx = \ln(1+x^2)\Big|_1^{\sqrt{e-1}} = 1$; b) $F'(x) = f(x) > 0$ pentru $x > 0 \Rightarrow F$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$; c) $\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx < \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\,dx < \int_2^4 f(x)\,dx \Leftrightarrow \ln(1+x^2)\Big|_0^2 < \ln(1+x^2)\Big|_2^4 \Leftrightarrow \ln 5 < \ln\frac{17}{2} \Leftrightarrow 5 < \frac{17}{2}$ (adevărată).

TESTUL 2

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Avem o progresie aritmetică cu $a_1 = 1$, $r = 4$. Fie m numărul de termeni şi $n = 1 + 4(m - 1) = 4m - 3$. Din $\frac{m(4m-2)}{2} = 231 \Leftrightarrow m(2m-1) = 11 \cdot 21 \Rightarrow m = 11,\ n = 41$. **2.** Avem $f(x) = 1 + \frac{4}{x-3}$. Fie $3 < a < b$. Avem $0 < a - 3 < b - 3 \Rightarrow 0 < \frac{4}{b-3} < \frac{4}{a-3} \Rightarrow f(b) < f(a) \Rightarrow f$ strict descrescătoare. **3.** Fie $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 3$. Avem $C_x^{x-1} = C_x^1 = x$, $C_{x-1}^{x-3} = C_{x-1}^2 = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$. Din $x + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \leq 9 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{65}}{2} \leq x \frac{1+\sqrt{65}}{2}$. Obţinem $x \in \{3;\ 4\}$. **4.** $1 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 16$. **5.** AB: $y = -x + 1$ şi $-(-3) + 1 = 4$, deci $C \in AB$.



6. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$, unde $ABCD$ şi $ABFE$ sunt dreptunghiuri. Atunci $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = 5$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $X = A(a, b)$, $Y = A(c, d) = \begin{pmatrix} c & d \\ -3d & c \end{pmatrix} \Rightarrow X + Y = A(a, b) + A(c, d) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -3(b+d) & a+c \end{pmatrix} = A(a + b, c + d) \in G$, deoarece avem şi $a + b \in \mathbb{Z}$, $c + d \in \mathbb{Z}$; b) $A(a, b) \cdot A(c, d) = \begin{pmatrix} ac - 3bd & ad + bc \\ -3(ad + bc) & ac - 3bd \end{pmatrix} = O_2 \Leftrightarrow ac - 3bd = 0,\ ad + bc = 0 \Rightarrow a = b = 0$ sau $b = d = 0 \Leftrightarrow X = O_2$ sau $Y = O_2$; c) $\Delta = \det A = a^2 + 2b^2$ şi în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avem $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a \end{pmatrix}$. Atunci $A^{-1} \in G \Leftrightarrow \frac{a}{\Delta} \in \mathbb{Z},\ \frac{b}{\Delta} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = \pm 1,\ b = 0$ sau $a = 0$, $b = \pm 1$. **2.** a) $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$. Din $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (e - 4)(x - 3) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow e = 4$; b) Pentru $x * y$ avem $e' = 3$. Din $f(3) = 0$ şi $f(1) = 4 \Rightarrow a = 1$, $b = -3$, $f(x) = x - 3$; c) Prin inducţie avem $\underbrace{x \circ x \circ .. \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = (x - 3)^n + 3$. Deci $(x - 3)^{2010} + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$; b) $f''(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ crescătoare pe $\mathbb{R}$;

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$	+ + + + +	+ + + + +	0	+ + + + +	+ + + + +
$f'(x)$	$-\pi/2$ – – – –	– – – – –	0	+ + + + +	+ + + + $\pi/2$
$f(x)$		↘	0	↗	

Funcţia f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$, strict crescătoare pe $(0, \infty)$, iar $(0, 0)$ este punct de minim. **2.** a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(-\cos x)'}{\cos x}\, dx = \ln|-\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\sqrt{2}$; b) $0 \le x \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \le \operatorname{tg} x \le 1 \Rightarrow 0 \le$ $\le \operatorname{tg}^{n+1} x \le 1 \Rightarrow 0 \le I_{n+1} \le I_n$; c) $I_{n+2} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x(\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^n x)(\operatorname{tg} x)'\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$ $= \frac{1}{n+1}$.

TESTUL 3

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{1}{4} - 2\cdot\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{21}{4}$. **2.** $y = x + 1$, $y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow A(1; 2); B(4; 5)$.
3. $2 - 5 + 3 = 0$. **4.** $C_5^2 = 10$. **5.** $M\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$ mijlocul lui $BC \Rightarrow MA = \sqrt{\left(1+\frac{3}{2}\right)^2 + (3+2)^2} =$ $= \frac{5\sqrt{5}}{2}$. **6.** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = O_3$; b) $B = I_3 + A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Orice minor de ordin 2 al lui B este $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ şi rang $B = 1$; c) $(I_3 + A)(I_3 - A) = I_3 + A - A + A^2 = I_3 \Rightarrow (I_3 + A)^{-1} = I_3 - A$.
2. a) $x * y = (x + 1)(y + 1) - 1$. Se arată că $(x * y) * z = x * (y * z) = (x + 1)(y + 1)(z + 1) - 1$; b) $x * (-1) = (x + 1)(-1 + 1) - 1 = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Analog avem şi $(-1) * x = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Observație.* Elementul -1 se numeşte element absorbant; c) $f(x * y) = f(xy + x + y) = xy + x + y + 1 =$ $= (x + 1)(y + 1) = f(x) \cdot f(y)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x + 1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1 + \frac{-1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$; b) $f'(x) = \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x^2} =$ $= \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Funcția f este crescătoare pe $(-\infty, -1)$ şi $(1, \infty)$ şi descrescătoare pe $(-1, 0)$ şi $(0, 1)$; c) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y = x - 1$ asimptotă oblică la $+\infty$. **2.** a) f este continuă pe $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$ şi cum este continuă şi în 0 (deoarece $f(0 - 0) = f(0) = f(0 + 0) = 0$) $\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$; b) $F(x) = \begin{cases} e^x(x - 1) + a, & x \le 0 \\ -\cos x + b, & x > 0 \end{cases}$. Din f continuă în 0 $\Rightarrow a - 1 = b -$

$-1 \Rightarrow a = b \Rightarrow F(x) = \begin{cases} e^x(x-1)+a, & x \le 0 \\ -\cos x + a, & x > 0 \end{cases}$; c) Avem $f(x) \ge 0$ pe $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f(x) \le 0$ pe $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ şi deci $A = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = 2$.

TESTUL 4

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. $\frac{3^6-1}{3-1} = 364$. **2.** $\Delta \ge 0$, $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow m = 0$. **3.** $f(x) = \log_2 x + \log_4 x - \frac{3}{2}$ funcţie strict crescătoare, $f(2) = 0 \Rightarrow x = 2$. **4.** Cifra unităţilor poate fi oricare din cele 4 cifre, cifra zecilor oricare din cele 3 cifre rămase, iar cifra sutelor oricare din celelalte două. Sunt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ numere. Avem $p = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. **5.** $x_D = x_B + x_C - x_A = -3$; $y_D = y_B + y_C - y_A = 4$; $D(-3, 4)$.

6. $\sqrt{(2n+1-2n+1)^2 + (2n+3-2n-1)^2} = 2\sqrt{2}$ (nu depinde de n).

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a) $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{c_2-c_3}{\overset{c_1-c_3}{=}} \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2$; b) Sistemul (S) este compatibil determinat pentru $m \in \mathbb{R} - \{1\}$. Avem $\Delta_x = -(m-1)^2$, $\Delta_y = (m-1)(2-m)$, $\Delta_z = (m-1)(m^2+m-3)$; $x = -1$, $y = \frac{2-m}{m-1}$, $z = \frac{m^2+m-3}{m-1}$; c) $\frac{m^2+m-2}{m-1} > 0 \Leftrightarrow m \in (-2, 1) \cup (1, \infty)$. **2.** a) $(x * y) * z = \left(x + y + \sqrt{3}\right) * z = x + y + \sqrt{3} + z + \sqrt{3} = x + \left(y + z + \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} = x + (y * z) + \sqrt{3} = x * (y * z)$;
b) $3^x + 3^{2x} + \sqrt{3} = 12 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x + 3^{2x} = 12 \Rightarrow x = 1$; c) $N = \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{3}\left[(2-2-4-6-8-10)+(3+5+7+9)\right] = -4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a) $f(x) = x^3 - x^2\sqrt{2} + x^2\sqrt{2} - 2x - x + \sqrt{2} = x^2\left(x - \sqrt{2}\right) + x\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) - \left(x - \sqrt{2}\right) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} - 1\right)$; b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} - 1\right)}{x - \sqrt{2}} = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \left(x^2 + x\sqrt{2} - 1\right) = 3$;

c) $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ şi avem tabelul:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +		0	– – –	0	+ + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2+\sqrt{2}$	↘	$\sqrt{2}-2$	↗	

$A\left(-1, 2+\sqrt{2}\right)$ punct de maxim local, $B\left(1, \sqrt{2}-2\right)$ punct de minim local.

2. a) $I_1 = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$; $I_2 = 2\int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)\,dx = 2\left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{16}{15}$;
b) $x \in [-1, 1] \Rightarrow x^2 \in [0, 1] \Rightarrow -1 \le -x^2 \le 0 \Rightarrow 0 \le 1 - x^2 \le 1$; c) $1 - x^2 \in [0, 1] \Rightarrow 0 \le (1 - x^2)^n \in$

Cuprins