EDITURA PARALELA 45

BIBLIOTECA DE MATEMATICĂ

Redactare: Olimpia Filip, Andreea Cîrstea
Tehnoredactare: Ovidiu Mictar
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ANDREI, GHEORGHE
Partea întreagă [x] : partea fracţionară {x} / Gheorghe Andrei, Constantin Caragea ; pref. de Radu Gologan. - Piteşti : Paralela 45, 2018
2 vol.
ISBN 978-973-47-2693-6
Vol. 2 : x=[x]+{x}. - 2018. - Conţine bibliografie. - ISBN 978-973-47-2695-0

I. Caragea, Constantin
II. Gologan, Radu N. (pref.)

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2018
Prezenta lucrare foloseşte denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conţinutul este protejat de legislaţia privind dreptul de proprietate intelectuală.

EDITURA PARALELA 45

Gheorghe ANDREI Constantin CARAGEA

PARTEA ÎNTREAGĂ $[x]$
PARTEA FRACŢIONARĂ $\{x\}$
$x = [x] + \{x\}$

VOLUMUL II

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Editura Paralela 45

EDITURA PARALELA 45

CUPRINS

EDITURA PARALELA 45

PREFAȚĂ

De-a lungul a aproape jumătate de secol, profesorii constănţeni Gheorghe Andrei şi Constantin Caragea au şlefuit matematic minţile a mii de foşti elevi, nu neapărat atunci avizi de matematică, dar azi intelectuali de vază, unii dintre ei făcând cinste României pe multe continente. Alţii sunt în prezent matematicieni renumiţi, ce duc mai departe faima şcolii româneşti de matematică.

Profesorii Andrei şi Caragea sunt renumiţi azi şi prin numărul însemnat de culegeri de probleme apărute în ultimii patruzeci de ani, dar şi prin problemele propuse la toate etapele olimpiadelor româneşti.

Culegerea de faţă este dedicată unui subiect important în toate domeniile matematicii: partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr. De această noţiune sunt legate importante probleme, unele încă deschise, din teoria numerelor, algebră, analiză matematică. De exemplu, chestiunile legate de ordinul de aproximare a unui număr iraţional cu un număr raţional conţin încă multe probleme deschise.

Cele nouăsprezece capitole ale cărţii fac o trecere prin toate domeniile matematicii unde apare noţiunea de parte întreagă sau parte fracţionară. Acestea conţin peste 1700 de probleme, prezentate gradat şi având, în fiecare capitol, un preambul teoretic complet.

O recomand cu mare căldură elevilor care nu neglijează matematica, dar, în primul rând, profesorilor de matematică din gimnaziu şi liceu. Vor găsi suficient material spre a delecta minţile deschise ale copiilor.

Radu Gologan

EDITURA PARALELA 45

INTRODUCERE

Cartea este o adevărată megaculegere de probleme care se adresează elevilor și profesorilor pasionați de matematică, în dorința de a obține performanțe sporite.

Ea are rolul de a ușura activitatea de căutare și selectare a problemelor cu partea întreagă și partea fracționară din diferite culegeri și publicații de matematică, întrucât această megaculegere este destul de cuprinzătoare. Ea reprezintă un izvor și un stimulator de abordare creatoare a altor probleme pe această temă.

Cu această ocazie aducem mulțumiri și felicitări tuturor autorilor multor probleme deosebite și fără de care cartea ar fi fost mai săracă și incompletă.

Au fost multe situații care ne-au pus „probleme” în găsirea soluțiilor, dar au fost și probleme asemănătoare propuse însă de „autori” diferiți. (Ne cerem anticipat scuze dacă am omis unii autori de probleme.)

Această carte este centrată pe un singur capitol de matematică: ***Partea întreagă și partea fracționară***, temă aproape inexistentă acum 30-40 de ani și mult mai frecventă în ultimii 15-20 de ani, atât în manuale, culegeri de probleme, reviste de specialitate, cât şi în concursurile școlare. Prin cantitatea și varietatea problemelor și mai ales prin abordarea diferențiată a temelor cuprinse în cele 19 capitole, cartea reprezintă o adevărată enciclopedie a acestei teme.

Lucrarea acoperă un gol bibliografic, deoarece până acum elevii și profesorii nu aveau la îndemână un astfel de vast material de studiu.

Prima carte pe această temă a apărut la noi în țară în anul 1996, la Editura GIL, autori fiind Gheorghe Andrei, Ion Cucurezeanu și Constantin Caragea, și anume, *Probleme de algebră – gimnaziu și liceu*. *Funcțiile „partea întreagă” și „partea fracționară”*, urmată fiind de cartea regretatului profesor Mihai Onucu Drîmbe, *200 de identități și inegalități cu „partea întreagă”*, Editura GIL, 2003.

Prin multele probleme de nivel ridicat, prezenta culegere poate sta la baza formării competențelor sporite în acest domeniu. Ea ar trebui să se afle la oricare centru de excelență, în orice școală unde se pregătesc olimpici și chiar în posesia oricărui elev capabil și doritor de performanță.

În fiecare capitol există o ierarhizare a problemelor, în funcție de gradul de dificultate, și anume: „probleme elementare”, nemarcate, probleme

EDITURA PARALELA 45

mai dificile, cu o steluță, iar cele foarte dificile, cu două sau trei steluțe. Desigur, problemele de nivel standard, nemarcate, pot fi considerate ca „repere” necesare abordării celor mai dificile dintre ele.

Chiar dacă unele probleme sunt asemănătoare sau îmbracă o „haină mai veche”, ele au fost totuși puse cu respectul cuvenit istoriei lor și care confirmă progresul abordărilor pe această temă în ultimii 20-30 de ani.

Sunt destule probleme care apar în unul sau două capitole, deoarece ele pot fi încadrate tematic în aceste capitole. În cadrul aceleiași teme, megaculegerea cuprinde 19 capitole diferențiate pe anumite subteme. Vom enumera câteva: Cap. I – Proprietăți, Cap. II – Aplicaţii de bază, completat cu Cap. V – Partea întreagă şi partea fracţionară a unor expresii cu radicali și Cap. VI – Egalități și identităţi, Cap. XV – Inegalități, Cap. VIII, IX, X – Ecuații, ecuații cu parametri, respectiv ecuații cu mai multe necunoscute, Cap. XII – Sisteme, Cap. XIII – Elemente de aritmetică, Cap. XIV – Sume, Cap. XVI și XVII – Șiruri, respectiv funcții, care conțin probleme ce aduc o completare a capitolelor respective din clasele a IX-a, a X-a și a XI-a. Capitolul XIX – Paragrafe speciale cuprinde chiar câteva paragrafe speciale care pun în evidență o gamă largă de aplicabilitate a funcției „partea întreagă” și „partea fracționară”: funcția de rotunjire, funcția lui Legendre cu aplicații, funcțiile $\tau(n), \sigma(n), \varphi(n)$ (cu notațiile consacrate), spectrul unui număr, puncte laticiale etc.

Megaculegerea conține peste 1700 de probleme și proprietăți importante cu aplicativitate imediată la alte probleme. Pentru ca această carte să fie accesibilă unui număr mai mare de elevi și profesori, soluțiile sunt destul de detaliate, iar multe dintre probleme au câte două sau trei soluţii.

Pentru alcătuirea acestei culegeri de probleme, s-a depus o muncă susținută pe parcursul mai multor ani, consultându-se un uriaș material bibliografic, iar ca urmare, autorii înșiși şi-au sporit competențele în acest domeniu.

Așteptăm soluții deosebite sau abordări interesante, precum și noi probleme pe această temă, ce vor fi cuprinse într-o viitoare ediție (e-mail: profandreigheorghe@gmail.com).

Autorii

EDITURA PARALELA 45

capitolul 13

Elemente de aritmetică

$\oint$ **1.**

1*. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

a) $[\sqrt{n^2+n}]$;

b) Prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2+n}$;

c) Să se determine ultima cifră a numărului $[10 \cdot \sqrt{n^2+n}]$.

2. Arătați că pentru $n \geq 5$ numărul a_n, egal cu partea fracționară a numărului $\sqrt{n^2+2n}$, are prima zecimală 9.

Există *n* pentru care a_n are primele 2011 zecimale egale cu 9?

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine prima zecimală a șirului $a_n = \sqrt{n^2+n}$;

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care prima zecimală a numărului $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ este 2;

c) Determinați prima zecimală de ordinul 1 a șirului $c_n = \sqrt{4n^2+n}$.

4. Determinați toate numerele naturale $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care a doua zecimală a numărului $\left\{\sqrt{n(n+1)}\right\}$ nu este 9.

5. Determinați cel mai mic număr natural pentru care primele două zecimale ale numărului $\sqrt{n^2+4n+1}$ sunt egale cu 9.

6**. Determinați numerele naturale nenule *n* pentru care numărul:

$$A = \left[\frac{n^3+8n^2+1}{3n}\right] \text{ este prim.}$$

7**. Să se determine cel mai mic număr natural pentru care

$$0{,}7 < \{\sqrt[3]{n}\} < 0,(7).$$

8**. Descrieți forma numerelor naturale *n* pentru care $1 + [\sqrt{2n}]$ divide pe $2n$.

9**. Demonstrați că există o infinitate de numere naturale *n* pentru care partea întreagă a numărului $\sqrt{n+1+\sqrt{n}}$ este diferită de partea întreagă a numărului $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}$.

10**. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $[n\sqrt{2}] = [n\sqrt{3}]$.

11**. Să se arate că nu există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\{2^m\sqrt{5}\} = \{3^n\sqrt{5}\}$.

EDITURA PARALELA 45

12. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$, numărul $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ este compus.

13*. Determinați numerele naturale n care satisfac simultan proprietățile:

a) $\left[\frac{n}{9}\right]$ este număr natural de trei cifre egale;

b) $\left[\frac{n+36}{4}\right]$ este un număr natural de patru cifre, cifrele fiind $\{2,0,0,9\}$.

14. Să se determine $a > 0$ știind că $a^2 + 2[a]$ să fie pătrat perfect.

15. Să se arate că $a_n = \left[\frac{n+3}{4}\right] + \left[\frac{n+5}{4}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + n^2 + 3n + 3$ este pătrat perfect, pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

16**. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care:

a) $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ este număr prim;

b) Să se detemine cel mai mare $n \in \mathbb{N}$, pentru care $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ este număr prim.

17**. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 4$ și $\left[\frac{2^n}{n}\right]$ este o putere a lui 2, atunci n este o putere a lui 2.

18***. Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ cu $a < \sqrt{2n}$. Să se arate că numărul $\left[\frac{n^2}{a^2}\right]$ este pătrat perfect, dacă și numai dacă n se divide cu a.

19**. Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left\{\sqrt{n+\sqrt{n}}\right\} = \{\sqrt{a}\}$. Arătați că $4a+1$ este pătrat perfect.

20. Fie p un număr prim, $p \geq 3$ și d un număr liber de pătrate.
Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea: $\left\{n\sqrt{d} + \frac{n}{p}\right\} = \{n\sqrt{d}\}$?

21**. Să se arate că: $\left[a\left[\frac{n+a^2}{a}\right] + a\right] = n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, unde $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

22**. Fie $a \in \mathbb{R}_+^*$, numărul de aur, adică soluția pozitivă a ecuației

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

(Ecuația caracteristică a șirului lui Fibonnaci)
Să se arate că $[a^2 n] \equiv \big[a[an]\big] + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

EDITURA PARALELA 45

capitolul 17

Funcţii

∮ 1. Exerciții diverse

1*. Să se arate că funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = x + \left[\frac{x}{6}\right] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{2x}{3}\right]$ este periodică și să se determine $\mathrm{Im}f$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $f(x) = \{x\} + \{2x\} + \{3x\}$.

a) Să se arate că f este periodică și să se determine perioada principală.

b) Să se rezolve inecuația $f(x) \leq 1$.

3. Fie $f: [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$ dat și $f(x) = (-1)^{[x]}\left(x - 2n\left[\frac{x}{2n}\right] - 1\right) + 4$.
Să se arate că f este periodică.

4. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că:
$f(x+2) = \{f(x+1)\} + [f(x)], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este periodică.

5. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că:

$$f\left(\left[\frac{m}{n}\right]\right) = \frac{f(m)}{f(n)}, \forall\, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$$

6*. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=1}^{n} \{kx\}$.
Să se arate că f este periodică și să se determine perioada principală.

7. Fie $a \in \mathbb{R}^*$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se arate că $f(x+a) = f(x) + f(a) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = a\left[\frac{x}{a}\right] + f\left(a\left\{\frac{x}{a}\right\}\right), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

8*. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \{x\} + \{2x\} + \{3x\}$.

a) Să se arate că f este periodică și să se determine perioada principală.

b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = 2$.

c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = 2{,}5$.

9. a) Fie $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x+1}{5}\right] + \left[\frac{x+2}{5}\right] + \left[\frac{x+3}{5}\right] + \left[\frac{x+4}{5}\right] + \left[\frac{x+5}{5}\right].$$

Să se determine $\mathrm{Im}f$.

EDITURA PARALELA 45

b) Fie $f: [0,50] \to \mathbb{N}, f(x) = [x] + [2x] + [3x] + \left[\frac{4x}{3}\right]$.

Să se determine $\mathrm{Im}f$.

c) Fie $f: [0,100] \to \mathbb{R}_+, f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{3}\right] + [3x] + [4x]$.

Să se determine $\mathrm{Im}f$.

10*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [a + x] - [a] - x$.

Să se arate că f este periodică și să se reprezinte grafic.

11* a) Arătați că $x + \frac{100}{x} \geq 20$, pentru $\forall\, x > 0$;

b) Determinați valoarea minimă a sumei

$$S_{(x)} = [x] + \left[\frac{100}{x}\right], \forall\, x > 0.$$

12*. Să se determine două drepte paralele $y = mx + a, y = mx + b$ care să determine o bandă ce cuprinde graficul funcției $f(x) = [x]$.

13*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \left[\left[x + \frac{1}{2}\right] - x\right]$ (funcția dinte).

Să se arate că f are axă de simetrie.

14*. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (-1)^{[x]}, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \\ 0 \quad , & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Arătați că f are o infinitate de axe de simetrie.

15**. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{2} - \left|1 - 2\left\{\frac{x+1}{2}\right\}\right|$.

Să se arate că:

a) $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$;

b) $\sin \pi x = \cos \pi\, f(x)$.

16**. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a[x] + b\{x\}$ este impară dacă și numi dacă $a = b$.

17*. Fie $f: \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \{x\}$. Să se arate că f este strict crescătoare.

18**. Să se arate că nu există funcții strict monotone $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f\big(f(x)\big) = \{x\}, \forall x \in [0,1]$.

19**. Arătați că funcția $f: \mathbb{N} \to [0,1]$, definită prin: $f(n) = \left\{\sqrt[3]{n^3 + n^2}\right\}$ este strict crescătoare.

EDITURA PARALELA 45