

Anton Negrilă

Maria Negrilă

MATEMATICĂ

TEME RECAPITULATIVE

CLASA A VIII-A

EDIȚIA A II-A, REVIZUITĂ

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E. nr. 4642/18.08.2021.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programă școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Iuliana Ene
Tehnoredactare: Roxana Pietreanu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

NEGRILĂ, ANTON

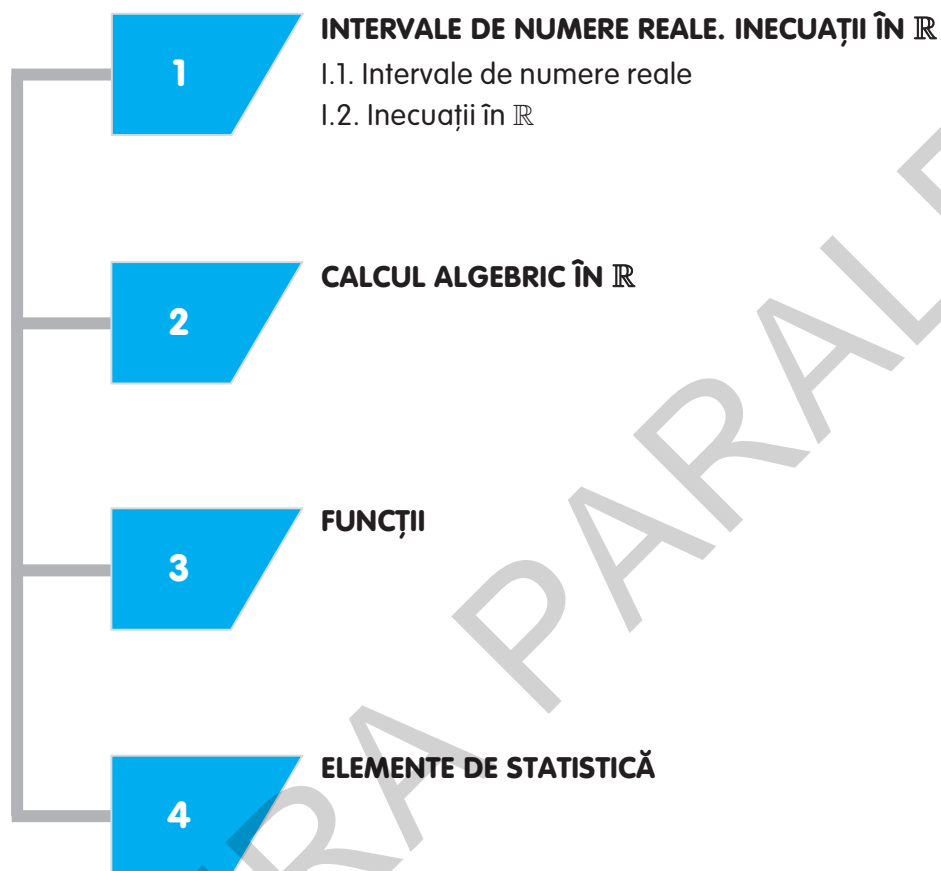
**Matematică : teme recapitulative : clasa a VIII-a / Anton Negrilă,
Maria Negrilă. - Ed. a 2-a, reviz.. - Pitești : Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3463-4**

I. Negrilă, Maria

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2022

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparalela45.ro



I.1. INTERVALE DE NUMERE REALE

1. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 2\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 7\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 1\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < 3\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 0\}.$

2. Scrieți sub formă de interval mulțimile de mai jos care satisfac relațiile date:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3 \text{ și } x < 5\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -5 \text{ și } x \leq 3\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \text{ și } x \geq 4\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \text{ și } x > -1\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}.$

3. Scrieți sub formă de interval mulțimile de mai jos care satisfac relațiile date:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 2\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 3| < 7\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \leq 5\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \leq 5\}.$

4. Scrieți mulțimile de mai jos sub formă de interval:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < \frac{7x+12}{2} < 27\right\};$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < \frac{4x+6}{2} \leq 9\right\};$

5. Scrieți mulțimile de mai jos sub formă de interval:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -9 < \frac{5x+12}{2} < 16\right\};$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{3x+7}{8} < 2\right\};$

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq \frac{3x+8}{2} < 13\right\};$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{4x+10}{2} < 13\right\};$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq \frac{6x+10}{2} \leq 11\right\}.$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{6x+18}{6} \leq 8\right\};$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < \frac{7x+8}{4} \leq 9\right\};$

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -13 \leq \frac{4x-15}{3} \leq 7\right\}.$

6. Scrieți următoarele mulțimi sub formă de interval:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \leq 7\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 5\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 5| \leq 9\};$

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 9| < 17\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 4| < 3\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 3| < 13\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 7| < 11\};$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 3| \leq 15\}.$

7. Scrieți următoarele mulțimi ca o reuniune de intervale:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\};$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 4\};$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 6| > 4\};$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \geq 5\};$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 5| > 3\};$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \geq 6\};$

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 3| > 9\};$

h) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 5| \geq 11\};$

i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 9| \geq 15\};$

j) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 7| > 13\}.$

8. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{5x + 3}{2} \right| \leq 6 \right\};$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{3x - 5}{3} \right| < 3 \right\};$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x - 3}{5} \right| \leq 3 \right\};$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{4x + 3}{3} \right| \leq 5 \right\};$

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x - 1}{7} \right| < 1 \right\};$

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{2x - 5}{3} \right| < 5 \right\}.$

9. Scrieți sub formă de interval mulțimile:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{2x + 5}{3} \leq 9 \right\};$

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq \frac{x - 5}{2} \leq 4 \right\};$

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq \frac{2x - 3}{3} < 3 \right\};$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{3x + 7}{2} \leq 11 \right\};$

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < \frac{5x + 9}{8} < 3 \right\};$

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq \frac{5x + 12}{2} \leq 16 \right\}.$

10. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{44 \cdot 45}, n \in \left(\frac{8}{9}; \frac{16}{15}\right);$

b) $a = \frac{1}{36 \cdot 37} + \frac{1}{37 \cdot 38} + \frac{1}{38 \cdot 39} + \dots + \frac{1}{89 \cdot 90}, a \in \left(\frac{1}{75}; \frac{1}{50}\right);$

c) $a = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{73 \cdot 75}, a \in \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right);$

d) $x = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{61 \cdot 64}, x \in \left(\frac{5}{16}; \frac{11}{32}\right).$

11. Efectuați:

a) $(-6; 4) \cup (-3; 5);$

b) $(-5; 3) \cup (-1; 4);$

c) $[-4; 3) \cup (-2; 5];$

d) $(-7; 4) \cup (-4; 6];$

e) $(-3; 2) \cup [2; 4);$

f) $(-5; 3] \cup (3; 4].$

12. Efectuați:

- a) $(-5; 4) \cup \{-5, -4, -2, 0, 2, 3, 4, 5\}$; b) $(-3; 6) \cup \{-4, -3, -2, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
 c) $(-4; 5) \cup \{-4, -3, -1, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$; d) $(-6; 3) \cup \{-7, -6, -5, -3, 2, 3, 4, 5\}$.

13. Efectuați:

- a) $(-5; 4) \cap (-6; 3)$; b) $(-7; 2] \cap [-4; 4)$; c) $(-4; 5] \cap [-2; 7)$;
 d) $[-3; 5) \cap [-1; 6)$; e) $(-8; 6] \cap (-4; 7)$; f) $[-6; 4) \cap [-1; 5]$.

14. Efectuați:

- a) $(-4; 6) \cap \{-4, -3, -1, 1, 3, 5, 6\}$; b) $(-3; 5) \cap \{-3, -2, -1, 1, 3, 4, 5\}$;
 c) $(-5; 4) \cap \{-5, -4, -1, 2, 3, 4\}$; d) $(-6; 4) \cap \{-6, -5, -4, -1, 2, 3, 4\}$;
 e) $(-4; 2) \cap \{-4, -3, -2, 1, 2\}$.

15. Efectuați:

- a) $(-2; 4] \cap \mathbb{Z}^*$; b) $(-3; 2) \cap \mathbb{Z}^*$; c) $(-4; 3) \cap \mathbb{Z}$;
 d) $(-3; 2) \cap \mathbb{N}^*$; e) $(-1; 1) \cap \mathbb{Z}^*$; f) $[-2; 2) \cap \mathbb{N}^*$;
 g) $(-2; 4) \cap \mathbb{N}^*$; h) $(-2; 2) \cap \mathbb{Z}^*$; i) $(-3; 3) \cap \mathbb{N}^*$.

16. Efectuați:

- a) $A \cap \mathbb{Z}^*$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 3\}$; b) $A \cap \mathbb{N}^*$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$;
 c) $A \cap \mathbb{Z}^*$, unde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$; d) $(-2; 2] \cap [2; 4)$;
 e) $[-3; 4) \cap [4; 5)$; f) $(-4; 5) \cap (-2; 6) \cap \mathbb{Z}^*$.

17. Determinați cel mai mare număr întreg din intervalul:

- a) $(-\infty; 4,6)$; b) $(-\infty; -3,2)$; c) $(-3,1; 5,4)$; d) $(-3; 5,28)$;
 e) $(-\infty; 2)$; f) $(-\infty; 3]$; g) $(2,5; 4,8)$; h) $(-\infty; -7)$.

18. Determinați cel mai mic număr întreg din intervalul:

- a) $(-4,3; +\infty)$; b) $(5,6; +\infty)$; c) $(-4,6; 2,8)$; d) $(-7,2; -1,2)$;
 e) $(-5; -1)$; f) $(-3; 3,4]$; g) $(-8,6; -2,4)$; h) $(-2; 2]$.

19. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -11 \leq \frac{7x+13}{2} < 17\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < \frac{5x+12}{2} \leq 21\right\}$;

b) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq \frac{6x+18}{8} < 6\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < \frac{9x+16}{4} \leq 22\right\}$;

c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < \frac{7x+9}{4} < 11\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < \frac{5x+13}{4} < 7\right\}$;

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq \frac{4x+6}{2} < 13\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < \frac{6x+10}{4} \leq 4\right\}$.

20. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -11 \leq \frac{3x-7}{2} < 1 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -8 < \frac{5x+6}{3} \leq 7 \right\}$;

b) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < \frac{5x+9}{8} < 3 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{7x+18}{3} < 20 \right\}$;

c) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq \frac{5x+12}{4} \leq 8 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < \frac{7x+12}{9} < 6 \right\}$.

21. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-3| \leq 9\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| < 3\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| \geq 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+5| < 11\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-9| > 17\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+1| > 5\}$;

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| \geq 11\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| \geq 17\}$;

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-5| \geq 13\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| < 19\}$.

22. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-7| < 19\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-9| \leq 23\}$;

b) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+1)^2} \leq 19 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+5)^2} < 17 \right\}$;

c) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-11)^2} \leq 7 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-5)^2} < 9 \right\}$;

d) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+7)^2} < 15 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-3)^2} \leq 21 \right\}$;

e) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+1)^2} \leq 17 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-7)^2} \leq 15 \right\}$.

23. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| \geq 15\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-5| > 9\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+1| > 7\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| \geq 11\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-3| > 15\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+7| > 19\}$.

24. Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, în fiecare dintre cazurile de mai jos:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-9)^2} \leq 17 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+7)^2} \leq 19 \right\}$;

b) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x-7)^2} < 13 \right\}$, $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(2x+9)^2} < 15 \right\}$;

1

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

I.1. Puncte, drepte, plane: determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane. Paralelism: unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu planul, plane paralele

I.2. Perpendicularitate: dreaptă perpendiculară pe un plan, plane perpendiculare

I.3. Proiecții ortogonale. Unghi diedru. Teorema celor trei perpendiculare. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate

2

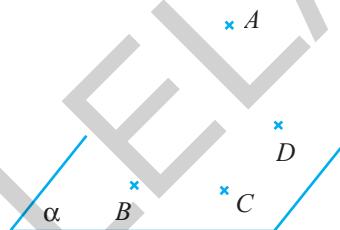
ARI ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

EDITURA PARALELA 45

I.1. PUNCTE, DREPTE, PLANE: DETERMINAREA PLANULUI, RELĂȚII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ȘI PLANE. PARALELISM: UNGHIUL A DOUĂ DREPTE, DREAPTĂ PARALELĂ CU PLANUL, PLANE PARALELE

1. Fie $A \notin \alpha$ și B, C, D puncte în planul α . Completați spațiile libere de mai jos:

- a) $(ABD) \cap (ADC) = \dots\dots\dots$;
- b) $(ACD) \cap \alpha = \dots\dots\dots$;
- c) $(BCD) \cap (ABD) = \dots\dots\dots$;
- d) $AB \cap \alpha = \dots\dots\dots$;
- e) $BD \cap (ABC) = \dots\dots\dots$;
- f) $(ABC) \cap (ACD) = \dots\dots\dots$;
- g) $AD \cap \alpha = \dots\dots\dots$;
- h) $BC \cap (ABD) = \dots\dots\dots$.



2. Fie A, B, C, D patru puncte distincte. Scrieți dreptele determinate de câte două dintre ele, în următoarele situații:

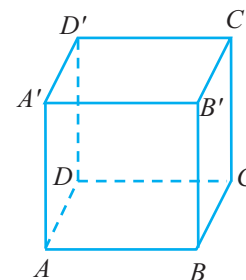
- a) trei dintre cele patru puncte sunt coliniare;
- b) oricare trei dintre cele patru puncte sunt necoliniare;
- c) punctele sunt necoplanare.

3. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare.

- a) Scrieți toate dreptele determinate de câte două dintre cele patru puncte.
- b) Scrieți două perechi de drepte necoplanare.
- c) Scrieți dreptele concurente în punctul A .
- d) Scrieți planele care au punctul A punct comun.
- e) Scrieți planele care au dreapta CD dreaptă comună.
- f) Scrieți trei drepte coplanare două câte două, dar necoplanare toate trei.
- g) Scrieți trei drepte conținute în același plan.

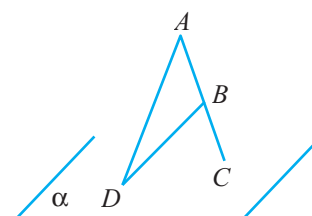
4. În figura alăturată este reprezentat un cub $ABCD A' B' C' D'$.

- a) Scrieți trei perechi de drepte necoplanare.
- b) Scrieți dreptele concurente în punctul D' .
- c) Scrieți planele care au punctul C punct comun.
- d) Scrieți planele care au dreapta $B' C'$ dreaptă comună.
- e) Scrieți patru puncte necoplanare.
- f) Scrieți trei drepte coplanare două câte două, dar necoplanare toate trei.
- g) Scrieți trei drepte conținute în același plan.



5. În figura alăturată, punctele $A, B \notin \alpha$, iar C și D sunt în planul α . Se știe că B este mijlocul segmentului AC , $AB = 9$ cm, $AD = 15$ cm și $BD = 12$ cm.

- a) Determinați dreapta de intersecție a planelor (ABD) și α .
- b) Calculați perimetrul și aria triunghiului ADC .



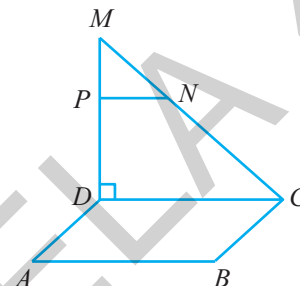
6. Punctele D, A, B și C sunt puncte necoplanare ($D \notin (ABC)$). Se știe că $DA = DB = DC = 36$ cm și $AB = AC = BC = 36$ cm, iar M este mijlocul laturii AB .
- Stabiliți natura triunghiului DMC .
 - Calculați aria triunghiului DMC .
 - Dacă $DE \perp MC, E \in (MC)$, calculați DE .
7. Se consideră triunghiul echilateral BDC , cu $BD = 24$ cm și $A \notin (BDC)$ astfel încât $AB = 12\sqrt{5}$ cm, $AD = AC = 12\sqrt{3}$ cm și cu M mijlocul laturii CD .
- Stabiliți natura triunghiului ABM .
 - Calculați aria triunghiului ABM .
 - Calculați distanța de la M la dreapta AB .
8. Fie A, B, C și D patru puncte necoplanare, $A \notin (BCD)$ cu $AB = 27$ cm, $BC = 45$ cm și $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Se consideră punctele $M \in (AB)$ cu $AM = 12$ cm și $N \in (AC)$ astfel încât $AN = 9$ cm.
- Determinați dreapta de intersecție a planului (MND) cu planul (BDC) .
 - Calculați lungimea segmentului MN .
9. Fie $ABCD$ un pătrat cu $AB = 12$ cm și un punct $M \notin (ABC)$. Se știe că $MA = MB = MC = MD = 6\sqrt{3}$ cm, iar P și N sunt mijloacele segmentelor AB și, respectiv, BC .
- Stabiliți natura triunghiului MNP .
 - Arătați că $PN \parallel (MAC)$.
 - Calculați aria triunghiului MNP .
 - Calculați măsura unghiului dintre dreptele PN și AD , precum și măsura unghiului determinat de dreptele MN și AC .
10. Se consideră piramida regulată $VABCD$, unde $VA = 9\sqrt{3}$ cm și $AB = 18$ cm. Se notează cu G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor VAB și, respectiv, VBC .
- Dacă M și N sunt mijloacele laturilor AB , respectiv BC , arătați că $MN \parallel (VAC)$.
 - Arătați că $G_1G_2 \parallel (ABC)$.
 - Stabiliți natura triunghiului VMN .
 - Calculați aria triunghiului VG_1G_2 .
 - Calculați măsurile unghiurilor dintre dreptele G_1G_2 și AC , respectiv dintre G_1G_2 și AB .
11. Fie $VABCD$ o piramidă regulată, unde M este mijlocul laturii AD , N este mijlocul laturii BC , iar P este mijlocul muchiei VC .
- Arătați că punctele V, M, O și N sunt coplanare, unde $\{O\} = AC \cap BD$.
 - Arătați că $AB \parallel (VMN)$.
 - Arătați că $PN \parallel (VBD)$.
 - Arătați că $(PMN) \parallel (VAB)$.
12. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și $M \in (AD)$, astfel încât $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$, iar $N \in (AC)$ și $P \in (AB)$, astfel încât $\frac{AP}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$.
- Arătați că $PN \parallel (ABC)$.
 - Dacă $MN \cap (BCD) = \{Q\}$ și $MP \cap (BCD) = \{R\}$, arătați că $RQ \parallel (ABC)$.

13. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu latura $AB = 6$ cm și M mijlocul lui CC' .

- Determinați dreapta de intersecție a planului $(D'BM)$ cu planul (ABC) .
- Stabiliți natura triunghiului $D'BN$, unde $\{N\} = D'M \cap (ABC)$.

14. În figura alăturată, $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 18$ cm și $AD = 12$ cm, iar triunghiul MDC este dreptunghic, $\sphericalangle MDC = 90^\circ$, cu $M \notin (ABC)$. Fie $P \in (MD)$ și $N \in (MC)$ cu $MP = 8$ cm, iar $\frac{MN}{NC} = \frac{1}{2}$. Știind că $MC = 30$ cm:

- calculați tangenta unghiului format de PN cu AC ;
- calculați sinusul unghiului format de MC cu AB ;
- calculați lungimea segmentului PN ;
- arătați că $PN \parallel (ABC)$.



15. Fie $ABCD$ un pătrat cu latura $AB = 9$ cm și $M \notin (ABC)$ astfel încât triunghiul MDC este dreptunghic, $\sphericalangle MDC = 90^\circ$ și $MD = 27$ cm.

- Dacă E este mijlocul segmentului MD , $EF \perp MC$, $F \in (MC)$ și $EF \cap DC = \{G\}$, cu $ME = 15$ cm, $MF = 9$ cm, calculați GD .
- Determinați dreapta de intersecție a planelor (AEF) și (ABC) .
- Calculați lungimea segmentului GA .
- Arătați că $CE \perp MG$.

16. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă dreaptă.

- Precizați poziția dreptei $A'B'$ față de planul (ABC) .
- Precizați poziția dreptei AA' față de planul (BCC') .
- Precizați poziția dreptei BB' față de dreapta AC .
- Precizați poziția dreptei AC față de planul $(A'B'C')$.
- Calculați măsurile unghiurilor formate de dreptele:
 - AA' și BC ;
 - BC și $A'B'$;
 - BB' și CC' .

17. În paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$ se notează cu O_1, O_2, O_3 și O_4 centrele fețelor $ADD'A', ABB'A', BCC'B',$ respectiv $DCC'D'$. Arătați că:

- $O_1O_4 \parallel (ABC)$;
- $O_2O_3 \parallel (A'B'C')$;
- O_1O_4 și O_2O_3 sunt coplanare;
- $(O_1O_2O_3) \parallel (ABC)$.

18. Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$. Determinați măsurile unghiurilor formate de dreptele:

- $A'B'$ și AD ;
- AB' și DC ;
- AD' și $B'C$;
- BC' și AC ;
- BC și $A'B'$;
- $D'C'$ și $A'B$;
- DC și $B'C'$;
- BC' și $D'C$;
- $D'O$ și BC' , $AC \cap BD = \{O\}$.

19. Se consideră paralelipipedul $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm și $CC' = 16$ cm, iar $M \in (CC')$ astfel încât $CM = 8$ cm.

- Precizați măsurile unghiurilor determinate de dreptele:
 - AA' și BC ;
 - BD și $B'D'$;
 - DC și $A'D'$;
 - $A'B'$ și BC ;
 - BM și AD .
- Calculați tangenta unghiului format de $D'M$ și AA' .

20. Fie $VABCD$ o piramidă regulată cu $AB = 10$ cm, $VA = 16$ cm și E mijlocul muchiei VD .
- Arătați că $VB \parallel (EAC)$.
 - Determinați măsura unghiului format de dreptele VB și AC .
 - Calculați aria triunghiului EAC .
21. În tetraedrul $ABCD$ se notează cu M , N și P mijloacele laturilor BA , BC și, respectiv, BD .
- Arătați că planele (MNP) și (ADC) sunt paralele.
 - Arătați că $\Delta MNP \sim \Delta ACD$.
 - Calculați raportul ariilor celor două triunghiuri asemenea de la punctul b).
22. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub, unde O_1 , O_2 și O_3 sunt centrele fețelor $ADD'A'$, $DCC'D'$ și, respectiv, $BCC'B'$.
- Arătați că $O_1O_2 \parallel (ABC)$.
 - Aflați măsura unghiului format de O_2O_3 cu dreapta AD .
 - Aflați măsura unghiului format de O_1O_2 cu dreapta AB .
 - Aflați măsura unghiului format de O_1O_2 cu O_2O_3 .
 - Arătați că planele $(O_1O_2O_3)$ și (ABC) sunt paralele.
23. Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$. Prin punctul G , centrul de greutate al feței VBC , se duce un plan paralel cu planul ABC , care intersectează muchiile VA , VB și VC în punctele M , N și, respectiv, P .
- Arătați că $\Delta MNP \sim \Delta ABC$.
 - Dacă $AB = 12$ cm, calculați aria triunghiului MNP .
24. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $VA = AB = 16$ cm. Se notează $(VBC) \cap (VAD) = d$ și $(VAB) \cap (VDC) = g$.
- Arătați că planul determinat de dreptele d și g este paralel cu planul (ABC) .
 - Calculați măsurile unghiurilor determinate de dreptele:
 - AC și g ;
 - BC și g ;
 - BD și d ;
 - AD și d ;
 - d și VB .
25. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu $AB = 18$ cm, iar M , N , P , Q mijloacele muchiilor AB , BC , CD și DA .
- Arătați că $BD \parallel (MNP)$ și $AC \parallel (MNP)$.
 - Arătați că M , N , P și Q sunt coplanare.
 - Calculați aria patrulaterului $MNPQ$.
 - Determinați măsura unghiului format de dreptele AC și BD .
26. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu $AB = 12$ cm.
- Calculați măsura unghiului format de dreptele $A'C'$ și AD' .
 - Calculați măsura unghiului format de dreptele BC' și AA' .
 - Dacă M este mijlocul lui AC și N este mijlocul lui BC' , calculați unghiul dintre MN și AD' .
27. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped cu dimensiunile $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 8$ cm.
- Calculați valoarea tangentei unghiului dintre dreptele $D'C$ și AB .
 - Calculați măsura unghiului dintre $D'C'$ și AD .
 - Dacă $AD' \cap A'D = \{O_1\}$ și $DC' \cap D'C = \{O_2\}$, stabiliți poziția dreptei O_1O_2 față de planul (ABC) .
 - Calculați măsura unghiului format de dreptele O_1O_2 și DC .

CUPRINS

ALGEBRĂ	5
CAPITOLUL I. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}	7
I.1. Intervale de numere reale	7
I.2. Inecuații în \mathbb{R}	13
CAPITOLUL II. CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}	15
CAPITOLUL III. FUNCȚII	24
CAPITOLUL IV. ELEMENTE DE STATISTICĂ	30
GEOMETRIE	33
CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU	35
I.1. Puncte, drepte, plane: determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane. Paralelism: unghiul a două drepte, dreaptă paralelă cu planul, plane paralele	35
I.2. Perpendicularitate: dreaptă perpendiculară pe un plan, plane perpendiculare	39
I.3. Proiecții ortogonale. Unghi diedru. Teorema celor trei perpendiculare. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate	43
CAPITOLUL II. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE	49
INDICAȚII ȘI SOLUȚII	59
NOTIȚELE ELEVULUI	83