Gheorghe IUREA
Adrian ZANOSCHI
Gabriel POPA
Gabriela ZANOSCHI
Ioana ANTON

matematică

aritmetică
geometrie

clasa a V-a

ediția a II-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa şcolară în vigoare pentru clasa a V-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Redactare: Andreea Roşca
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Matematică : aritmetică, geometrie : clasa a V-a : mate 2000 - standard /
Gheorghe Iurea, Adrian Zanoschi, Gabriel Popa, ... - Ed. a 2-a. - Piteşti :
Paralela 45, 2022
ISBN 978-973-47-3665-2

I. Iurea, Gheorghe
II. Zanoschi, Adrian
III. Popa, Gabriel

51

COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ
EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Piteşti,
jud. Argeş, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Stimate cadre didactice/dragi elevi,

Vă mulţumim că şi în acest an şcolar aţi ales să utilizaţi auxiliarele din colecţia **Mate 2000+**!

Mate 2000+ este cea mai longevivă colecţie din domeniul educaţional la nivel naţional şi, pentru multe generaţii de elevi, astăzi părinţi, reprezintă sinonimul reuşitei în carieră şi de ce nu, în viaţă. Concepută şi gândită de un colectiv de specialişti în domeniul educaţiei ca un produs unic pe piaţa editorială din România, **MATE 2000+** a reuşit să se impună, fiind în acest moment lider pe piaţa auxiliarelor şcolare dedicate matematicii.

Tehnologia a evoluat, vremurile s-au schimbat, iar toate acestea ne fac să credem că şi modul de abordare a predării se va schimba treptat. Fideli dezideratului de a oferi elevilor informaţii de un real folos, avem deosebita plăcere de a vă prezenta **Aplicaţia MATE 2000+**. Creată într-un mod intuitiv, disponibilă atât în Apple Store, cât şi în Play Store, cu secţiuni dedicate elevilor şi profesorilor, aplicaţia îmbogăţeşte partea teoretică din auxiliarele noastre.

Rolul aplicaţiei MATE 2000+ este de a oferi elevilor posibilitatea de a urmări într-un mod sistematizat conţinuturile esenţiale din programă, iar pentru profesori reprezintă un sprijin important pentru organizarea eficientă a lecţiilor, atât la clasă, cât şi în sistem online.

Vă dorim o experienţă de utilizare excelentă!
Echipa Editurii Paralela 45

CUVÂNT-ÎNAINTE

Seria „Mate 2000^+ Standard”, adresată elevilor de gimnaziu, a apărut din necesitatea sistematizării şi a interpretării creative şi aplicative a noţiunilor din programa în vigoare, având drept scop armonizarea practicii şcolare cu setul de competenţe impuse de această programă, dar şi cu specificul subiectelor examenului de Evaluare Naţională. Astfel, această serie însoţeşte elevii în trecerea de la înţelegerea noţiunilor şi formarea deprinderilor elementare de operare cu acestea la dezvoltarea raţionamentului matematic riguros.

Autorii au modelat conceptele şi noţiunile abstracte fireşti domeniului, astfel încât elevul să vadă şi să exerseze aplicaţiile practice ale matematicii, fiind pus permanent în situaţia de a adapta aparatul teoretic la necesităţile şi provocările vieţii de zi cu zi. Învăţarea devine, prin această deschidere către realitatea concretă, plăcută şi necesară.

Prezentul volum începe cu trei teste corespunzătoare evaluării iniţiale. Capitolele sunt împărţite în lecţii conform programei şcolare şi se încheie, fiecare, cu câte două teste sumative; la capitolele cu un număr mare de lecţii au fost intercalate şi teste de evaluare intermediară. Fiecare lecţie debutează cu un set de aspecte teoretice (definiţii, formule, concepte utilizate), fiind urmat de câteva probleme rezolvate detaliat şi de un număr de probleme reprezentative pentru tematica atinsă. Problemele propuse sunt organizate gradual, atât ca dificultate, cât şi din punct de vedere metodic. Acestea respectă standardele de formă şi conţinut, precum şi gradele de dificultate specifice Evaluării Naţionale, iar cele care depăşesc acest grad – puţine la număr – sunt marcate prin asterisc. Toate problemele au, la finalul culegerii, indicaţii de rezolvare, răspunsuri sau soluţii complete. Culegerea se încheie cu un capitol destinat recapitulării finale, urmat de trei teste finale.

Sperăm că această carte va aduce bucuria cunoaşterii şi a înţelegerii conceptelor matematice pentru elevii cărora le este adresată, iar colegii noştri profesori o vor primi ca pe un instrument util în demersul lor didactic.

Succes tuturor!

Autorii

TESTE INIŢIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(2p) **1.** Calculaţi: $100 + 36 : 9 \cdot 4 - 108$.

(2p) **2.** Zece caiete de acelaşi fel costă 40 de lei. Aflaţi câţi lei costă cinci dintre aceste caiete.

(1p) **3.** Calculaţi perimetrul unui dreptunghi, ştiind că lăţimea sa este de 10 cm, iar lungimea sa este de două ori mai mare decât lăţimea.

(1p) **4.** Calculaţi suma tuturor numerelor naturale de două cifre care au cifra zecilor cu 7 mai mică decât cifra unităţilor.

(1p) **5.** În fiecare zi dintr-o săptămână, temperatura medie a crescut cu 2°C faţă de ziua precedentă, iar luni temperatura medie a fost de 6°C. Aflaţi temperatura medie în ziua de duminică a respectivei săptămâni.

(1p) **6.** Ioana are două cutii, fiecare cu câte 12 biscuiţi. Ea împarte, în mod egal, toţi biscuiţii cu cele două surori ale sale. Cu câţi biscuiţi rămâne ea?

(1p) **7.** Un vas plin cu zahăr cântăreşte 450 de grame. Dacă se scoate jumătate din cantitatea de zahăr, vasul şi zahărul rămas cântăresc 250 de grame. Aflaţi câte grame cântăreşte vasul gol.

TESTUL 2

(2p) **1.** Calculaţi: $250 - 20 : (13 \cdot 9 + 3 - 118)$.

(2p) **2.** Sfertul jumătăţii unui număr natural este 74. Aflaţi numărul.

(1p) **3.** Găsiţi cel mai mic număr natural cu suma cifrelor egală cu 10.

(1p) **4.** Bunica lui Mihai a început un tratament în care trebuie să ia, în total, 18 pastile, câte una la fiecare 8 ore. Mihai a socotit că tratamentul va dura exact 6 zile. A calculat el corect durata tratamentului?

(1p) **5.** Andrei avea, la un moment dat, 100 de timbre în colecţia lui. Aflaţi câte timbre va avea el, după ce primeşte de la mama sa 25 de timbre şi de la tatăl său triplul numărului de timbre pe care i le-a dat mama.

(1p) **6.** Aflaţi câţi lei costă 1 kilogram de pere, ştiind că 2 kilograme de mere şi 1 kilogram de pere costă împreună 15 lei, iar 3 kilograme de mere şi 2 kilograme de pere costă, în total, 26 de lei.

(1p) **7.** Maria a cumpărat 53 de flori: lalele, garoafe şi trandafiri. Dacă 33 dintre florile cumpărate nu sunt lalele, iar garoafele sunt cu trei mai multe decât trandafirii, aflaţi câte flori de fiecare fel a cumpărat Maria.

TESTUL 3

(2p) **1.** Determinaţi numărul natural x pentru care $70 - (1 + 4 \cdot x - 5) : 2 = 62$.

(2p) **2.** Andrei are cu 50 de lei mai mult decât Bogdan. Calculaţi diferenţa dintre sumele de bani ale celor doi băieţi după ce Andrei îi dă lui Bogdan 10 lei.

(1p) **3.** Pe o latură a grădinii, tata a plantat 25 de trandafiri, la distanţe egale unul de altul. Între primul şi al treilea trandafir sunt 6 metri. Aflaţi câţi metri sunt între primul şi ultimul trandafir.

(1p) **4.** Trei numere naturale consecutive sunt scrise în ordine crescătoare. Determinaţi numărul din mijloc, ştiind că suma lor este egală cu 123.

(1p) **5.** Calculaţi suma tuturor numerelor naturale de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $a \cdot b \cdot c = 4$.

(1p) **6.** Un pepene cântăreşte cât cinci banane, două banane cântăresc cât trei mere, iar un măr cât patru caise. Aflaţi câte caise cântăresc cât un pepene.

(1p) **7.** Doi copii aveau împreună 34 de nuci. După ce al doilea a mâncat de două ori mai multe nuci decât primul, fiecare a rămas cu câte cinci nuci. Aflaţi câte nuci a avut fiecare dintre cei doi copii la început.

NUMERE NATURALE

CAPITOLUL I
OPERAŢII CU NUMERE NATURALE

I.1. SCRIEREA ŞI CITIREA NUMERELOR NATURALE

• Numerele naturale **se scriu** ca o succesiune de unul sau mai multe simboluri numite **cifre arabe**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

O cifră se poate repeta în scrierea unui număr natural, iar prima cifră a oricărui număr natural de cel puţin două cifre este întotdeauna nenulă.

• Acest mod de scriere a unui număr natural se numeşte **sistem zecimal** (sau **scriere în baza zece**), deoarece sunt folosite 10 cifre, iar 10 unităţi de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

• Scrierea numerelor naturale în baza zece este una poziţională, întrucât valoarea unei cifre depinde de poziţia ocupată de aceasta.

• Pentru un număr de două cifre folosim notaţia $\overline{ab}$, unde a şi b reprezintă cifre în sistem zecimal, cu $a \neq 0$. Descompunerea numărului $\overline{ab}$ în baza 10 este:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b.$$

• Pentru un număr de trei cifre folosim notaţia $\overline{abc}$, unde a, b şi c reprezintă cifre în sistem zecimal, cu $a \neq 0$. Descompunerea numărului $\overline{abc}$ în baza 10 este:

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

Similar se procedează cu numere de patru sau mai multe cifre.

• Pentru a **citi** un număr natural scris în baza zece, grupăm cifrele numărului respectiv câte trei, de la dreapta la stânga; grupele formate se numesc **clase**. Fiecare clasă este compusă din unităţi, zeci şi sute (de la dreapta la stânga). Denumirile claselor, de la dreapta la stânga, sunt: clasa unităţilor, clasa miilor, clasa milioanelor, clasa miliardelor etc. De exemplu, numărul 257 340 198 se citeşte „două sute cincizeci şi şapte de milioane trei sute patruzeci de mii o sută nouăzeci şi opt", iar tabelul de mai jos evidenţiază poziţia şi denumirea fiecărei cifre.

clasa milioanelor			**clasa miilor**			**clasa unităţilor**		
sute	zeci	unităţi	sute	zeci	unităţi	sute	zeci	unităţi
2	5	7	3	4	0	1	9	8

PROBLEME REZOLVATE

1. Răsturnatul numărului natural $\overline{abcd}$, cu $d \neq 0$, este numărul natural $\overline{dcba}$. Aflaţi toate numerele naturale de patru cifre, ştiind că fiecare număr este egal cu răsturnatul său şi suma cifrelor sale este egală cu 6.

Soluţie: Căutăm numerele naturale $\overline{abcd}$ cu $\overline{abcd} = \overline{dcba}$, de unde $a = d$ şi $b = c$. În plus, numerele $\overline{abba}$ au proprietatea că $a + b + b + a = 6$, deci $a + b = 3$. Soluţiile problemei sunt: 1221, 2112 şi 3003.

2. Aflaţi toate numerele naturale de cinci cifre, scrise în baza zece, care au:
- cifra unităţilor cu 3 mai mare decât cifra zecilor;
- cifra miilor egală cu cea mai mare cifră pară;
- cifra sutelor cu 2 mai mică decât cifra unităţilor;
- produsul cifrelor egal cu 0;
- toate cifrele diferite între ele.

Soluţie: Căutăm numerele naturale de forma $\overline{a8bcd}$, cu $d = c + 3$, $b = d - 2$, şi $a \cdot 8 \cdot b \cdot c \cdot d = 0$. Cum $b = c + 1$ şi $d = c + 3$, deducem că $b \neq 0$ şi $d \neq 0$. De asemenea, $a \neq 0$ (cifra de pe prima poziţie), deci este necesar ca $c = 0$, de unde $b = 1$, $d = 3$, iar a poate lua oricare dintre valorile 2, 4, 5, 6, 7, 9. Numerele căutate sunt: 28103, 48103, 58103, 68103, 78103 şi 98103.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieţi, în baza zece, numerele următoare:
a) douăzeci şi patru;
b) nouăsprezece;
c) patru sute cinci;
d) opt sute şaisprezece;
e) trei sute treizeci şi trei;
f) o mie patru;
g) cinci mii opt sute zece;
h) şapte mii trei sute patruzeci şi opt.

2. Scrieţi, în baza zece, numerele următoare:
a) treizeci de mii patru sute treisprezece;
b) cincisprezece mii două sute patruzeci şi trei;
c) şase sute opt mii opt sute şase;
d) patru milioane şase sute şapte mii;
e) treisprezece milioane nouă sute şase mii o sută doi;
f) nouă sute de milioane nouă sute nouă.

3. Citiţi numerele naturale de mai jos:
a) 7; b) 19; c) 43; d) 109; e) 310; f) 925.

4. Citiţi următoarele numere naturale:
a) 1307; b) 93 002; c) 27 413; d) 123 321; e) 4 309 005; f) 28 008 200.

5. Aflaţi toate numerele naturale de două cifre, având cifra unităţilor egală cu dublul cifrei zecilor.

6. Scrieţi cinci numere naturale, având suma cifrelor egală cu 2.

7. Scrieţi cinci numere naturale impare, diferite de 21, având suma cifrelor egală cu 3.

8. Descompuneţi, în baza 10, numerele naturale:
a) 27; b) 135; c) 9148; d) 12043.

9. Descompuneţi, în baza 10, numerele naturale de mai jos şi efectuaţi calculele, acolo unde este posibil:
a) $\overline{aa}$; b) $\overline{abab}$; c) $\overline{x0yx}$; d) $\overline{xyyx}$; e) $\overline{2a3a1}$; f) $\overline{1bb20}$.

10. Scrieţi numerele naturale care au următoarea descompunere în baza 10:
a) $3 \cdot 10 + 5$; b) $4 \cdot 100 + 7$;
c) $9 \cdot 100 + 3 \cdot 10$; d) $5 \cdot 10000 + 7 \cdot 100 + 1$;
e) $4 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$; f) $17 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 9$.

11. Scrieţi toate numerele naturale de două cifre, formate din cifre pare distincte.

12. a) Scrieţi toate numerele naturale de două cifre, care se pot forma cu cifrele 1, 2 şi 3.
b) Scrieţi toate numerele naturale de două cifre distincte, care se pot forma cu cifrele 7, 8 şi 9.

13. Scrieţi toate numerele naturale de trei cifre, cu exact două cifre egale, care se pot forma cu cifrele 0, 1 şi 2.

14. Determinaţi numerele naturale de trei cifre, formate din trei cifre distincte, având diferenţa dintre cifra sutelor şi cifra unităţilor egală cu 8.

15. Aflaţi toate numerele de forma $\overline{abcd}$ care îndeplinesc simultan condiţiile:
a) cifra sutelor este cea mai mică cifră pară;
b) cifra unităţilor este cea mai mare cifră impară;
c) cifra miilor este de două ori mai mică decât cifra zecilor.

16. Determinaţi numerele naturale de patru cifre, care au cifra miilor egală cu 6, cifra sutelor egală cu suma dintre cifra zecilor şi cifra unităţilor, iar cifra zecilor depăşeşte cifra miilor.

17. Scrieţi răsturnatul fiecăruia dintre numerele naturale: 12, 371, 1238, 20104, 111333, 710017.

18. Aflaţi toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc} = \overline{cba}$ şi $a + b + c = 4$.

19. Găsiţi corespondenţa dintre cele două coloane de mai jos.

1. Număr natural cu cifra sutelor minimă, nenulă.	A. 98010
2. Număr natural cu cifra zecilor de mii egală cu cifra zecilor.	B. 98170
3. Număr natural cu suma cifrelor minimă.	C. 99018
4. Număr natural cu toate cifrele nenule.	D. 96009
5. Număr natural cu cifra miilor cu 6 mai mare decât cifra sutelor.	E. 97093
6. Număr natural cu cifra unităţilor maximă, pară.	F. 97217

20. Aflaţi câte numere naturale cuprinse între 432 şi 531 conţin, în scrierea lor, cifra 3.

CAPITOLUL II
METODE ARITMETICE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

II.1. Metoda reducerii la unitate

Probleme rezolvate

1. Mergând cu viteză constantă, un autoturism parcurge 300 km în 5 ore.

a) Câţi kilometri va parcurge autoturismul în 3 ore?

b) Câte ore sunt necesare pentru un drum de 420 km?

Soluţie: Distanţa parcursă de autoturism creşte/scade în acelaşi ritm cu mărirea/micşorarea timpului de deplasare: timp mai mare, distanţă mai mare; timp mai mic, distanţă mai mică. Distanţa străbătută într-o oră (adică într-un timp ce cinci ori mai scurt) va fi, aşadar, de cinci ori mai mică:

5 ore .... 300 km

1 oră .... $300 : 5 = 60$ km

a) În 3 ore, autoturismul va parcurge $60 \cdot 3 = 180$ km.

b) Pentru a acoperi un drum de 420 km, e nevoie de $420 : 60 = 7$ ore.

2. Patru tractoare termină de arat un teren în şase zile.

a) În câte zile ar ara terenul trei tractoare?

b) De câte tractoare ar fi nevoie pentru a termina treaba în patru zile?

Soluţie: Timpul necesar lucrării creşte/scade în acelaşi ritm cu micşorarea/mărirea numărului de tractoare: tractoare mai puţine, zile mai multe; tractoare mai multe, zile mai puţine. Aşadar, un tractor ar ara întregul teren într-un timp de patru ori mai mare decât cele patru tractoare din problemă:

4 tractoare .... 6 zile

1 tractor .... $6 \cdot 4 = 24$ zile

a) 3 tractoare ar termina treaba în $24 : 3 = 8$ zile.

b) Pentru a termina în 4 zile, ar fi nevoie de $24 : 4 = 6$ tractoare.

3. a) O cadă de 120 de litri este alimentată de două robinete. Primul robinet poate umple cada în 20 de minute, iar al doilea robinet în 30 de minute. În cât timp ar umple cada, împreună, cele două robinete?

b) Aceeaşi întrebare, în cazul în care cada are 131 de litri.

Soluţie: a) Într-un minut, primul robinet aduce în cadă $120 : 20 = 6$ litri de apă, iar cel de-al doilea $120 : 30 = 4$ litri. Împreună, cele două aduc în cadă $6 + 4 = 10$ litri de apă, aşadar vor umple cada în $120 : 10 = 12$ minute.

b) În condiţiile problemei, cada se va umple în 12 minute, indiferent ce capacitate are; raţionamentul precedent conduce, însă, la calcule urâcioase. Gândim în felul următor: într-o oră (adică 60 de minute), primul robinet umple 60 : 20 = 3 căzi, iar cel de-al doilea 60 : 30 = 2 căzi. Împreună, în 60 de minute, vor umple 5 căzi, aşadar o cadă va fi umplută în 60 : 5 = 12 minute.
Am ales ca unitate o perioadă de timp care se împarte atât într-un număr întreg de intervale de 30 de minute, cât şi într-un număr întreg de intervale de 20 de minute. În acest caz, „reducere” e doar un fel de-a spune!

PROBLEME PROPUSE

1. Pentru a confecţiona 4 bluze este nevoie de 8 metri de pânză.
a) Câţi metri de pânză trebuie pentru a face 5 bluze?
b) Câte bluze se vor confecţiona din 12 metri de pânză?

2. Ioana rezolvă 42 de probleme în 7 zile.
a) Câte probleme va rezolva Ioana în 10 zile?
b) De câte zile are nevoie pentru a rezolva 30 de probleme?

3. Din 75 de litri de lapte se obţin 3 kg de unt.
a) Câţi litri de lapte trebuie pentru 5 kg de unt?
b) Câte kilograme de unt se obţin din 200 de litri de lapte?

4. Bunica fierbe prune într-o oală pentru a face magiun. În tabelul de mai jos este descrisă corespondenţa dintre cantitatea de prune şi numărul borcanelor de magiun obţinute. Completaţi spaţiile libere din tabel.

	A	B	C	D	E
Cantitate de prune (kg)			6	12	15
Număr borcane de magiun	2	6	4		

5. Bunicul doreşte să pună murături; el merge la piaţă, pentru a cumpăra 20 kg de gogonele. La o tarabă vede un carton care arată preţul, ca în desenul alăturat. Câţi lei va cheltui bunicul pe gogonele?

GOGONELE
1 kg → 5 lei
5 kg → 20 lei

6. Tata vrea să taie un trunchi de copac în butuci, pentru a putea depozita mai uşor lemnul de foc pentru iarnă. El observă că, dacă face cinci tăieturi, obţine 6 butuci. Câţi butuci va obţine dacă face zece tăieturi?

7. Zece muncitori termină o lucrare în 12 zile.
a) În câte zile vor termina lucrarea şase muncitori?
b) De câţi muncitori ar fi nevoie dacă lucrarea trebuie terminată în 3 zile?

8. Un bazin poate fi umplut de mai multe robinete având acelaşi debit. În tabelul de mai jos este descrisă corespondenţa dintre numărul de robinete şi timpul de umplere a bazinului. Completaţi spaţiile libere din tabel.

	A	B	C	D	E
Număr robinete			24	36	48
Timpul de umplere (ore)	16	12		4	

9. Şase copii mănâncă toate prăjiturile de pe un platou în şase minute. În câte minute ar termina prăjiturile nouă copii?

10. Un cor format din 60 de cântăreţi interpretează un imn în 5 minute. În cât timp va interpreta acelaşi imn un cor format din 100 de cântăreţi?

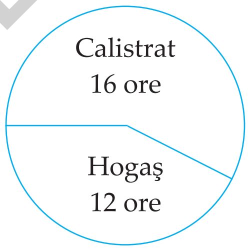
11. Doi cai termină tot fânul din iesle într-o oră. În cât timp ar termina fânul trei cai?

12. Un cal termină fânul din iesle în două ore, iar un mânz în cinci ore. În cât timp ar termina fânul din iesle doi cai şi un mânz?

13. Pentru a ara un teren având forma unui pătrat cu latura de 200 de metri, un tractorist primeşte 1800 de lei. Ce sumă va primi atunci când va ara un teren având forma unui pătrat cu latura de 300 de metri?

14. Pentru a însămânţa un teren cu suprafaţa de 18 hectare, 9 utilaje lucrează timp de 4 zile. De câte utilaje e nevoie pentru a însămânţa o suprafaţă de 28 de hectare în 7 zile?

15. Calistrat şi Hogaş, doi meşteri la fel de harnici şi de pricepuţi, termină împreună o lucrare. În diagrama alăturată se vede cât timp a muncit fiecare. Cei doi primesc, pentru toată treaba, 875 de lei. Cum vor împărţi între ei această sumă?



II.2. Metoda comparaţiei

Probleme rezolvate

1. Dorind să cumpere un buchet de flori, Bianca observă că pentru 3 lalele şi 6 narcise ar plăti 39 lei, iar pentru 6 lalele şi 6 narcise ar plăti 54 lei.

a) Aflaţi preţul unei lalele şi preţul unei narcise.

b) Calculaţi câţi lei trebuie să plătească Bianca pentru 7 lalele şi 4 narcise.

Soluţie: 3 lalele .... 6 narcise ....39 lei

6 lalele .... 6 narcise ....54 lei

a) Observăm că diferenţa de $54 - 39 = 15$ lei se datorează diferenţei dintre numerele lalelelor. Aşadar, $6 - 3 = 3$ lalele costă 15 lei, aşadar preţul unei lalele este de $15 : 3 = 5$ lei. Raportându-ne la prima situaţie, obţinem că 6 narcise costă $39 - 15 = 24$ lei, deci preţul unei narcise este de $24 : 6 = 4$ lei.

b) Suma necesară pentru a cumpăra 7 lalele şi 4 narcise este de $7 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 51$ lei.

2. Ema participă la un concurs de calcul cu ajutorul unui abac japonez. Pentru a efectua 6 adunări şi 5 înmulţiri, ea are nevoie de 69 de secunde; pentru a efectua 9 adunări şi 10 înmulţiri, are nevoie de 126 de secunde. Aflaţi în câte secunde va oferi Ema răspunsurile, dacă primeşte un set de 7 adunări şi 8 înmulţiri.

Soluţie: 6 adunări .... 5 înmulţiri .... 69 secunde

9 adunări .... 10 înmulţiri .... 126 secunde

Remarcăm că în a doua situaţie numărul de înmulţiri este dublu faţă de cel din prima situaţie. Vom dubla numărul de adunări şi cel de înmulţiri din prima situaţie şi atunci se va dubla şi timpul necesar:

12 adunări .... 10 înmulţiri .... 138 secunde

9 adunări .... 10 înmulţiri .... 126 secunde

Diferenţa de $138 - 126 = 12$ secunde provine de la diferenţa de $12 - 9 = 3$ adunări, deci o adunare necesită 4 secunde. Revenind la situaţia iniţială, obţinem că 5 înmulţiri necesită $69 - 6 \cdot 4 = 45$ de secunde, deci o înmulţire necesită 9 secunde. Pentru 7 adunări şi 8 înmulţiri, Ema are nevoie de $7 \cdot 4 + 8 \cdot 9 = 100$ de secunde.

PROBLEME PROPUSE

1. Daria a cumpărat 3 caiete şi 5 pixuri, plătind 30 lei. Barbu a cumpărat, din acelaşi loc, 6 caiete şi 5 pixuri, plătind 45 lei. Aflaţi preţul unui caiet şi preţul unui pix.

2. 4 lădiţe cu zmeură şi 7 lădiţe cu cireşe cântăresc 62 kg, iar 8 lădiţe cu zmeură şi 9 lădiţe cu cireşe cântăresc 94 kg. Aflaţi cât cântăresc 7 lădiţe cu zmeură şi 10 lădiţe cu cireşe.

3. Într-o zi petrecută în livadă, 10 fete şi 12 băieţi au cules, împreună, 1340 kg de mere. Dacă grupul ar fi fost format din 5 fete şi 17 băieţi, atunci cantitatea totală culeasă ar fi fost 1440 kg. Stabiliţi cu câte kilograme culege mai mult un băiat decât o fată într-o zi. (Considerăm că toate fetele culeg zilnic acelaşi număr de kilograme, respectiv toţi băieţii culeg zilnic acelaşi număr de kilograme.)

4. Bunica a plătit 39 lei pentru 3 kg de vinete şi 2 kg de ardei. Dorind să facă zacuscă, a doua zi a mai cumpărat 7 kg de vinete şi 10 kg de ardei, plătind 123 lei. Aflaţi care este preţul unui kilogram de vinete, respectiv preţul unui kilogram de ardei.

5. 8 tricouri şi 15 pălării costă 751 lei, iar 16 tricouri şi 20 de pălării costă 1252 lei. Aflaţi cât costă, împreună, un tricou şi două pălării.

6. La un magazin, 15 prăjituri şi 8 îngheţate costă 160 lei, iar 20 de prăjituri şi 16 îngheţate costă 240 lei. Aflaţi cât plăteşte Maria, la acest magazin, pentru trei prăjituri şi două îngheţate.

7. Cinci sărituri ale unui iepure şi şase sărituri ale unei vulpi măsoară împreună 16 m; şase sărituri ale aceluiaşi iepure şi cinci sărituri ale aceleiaşi vulpi măsoară împreună 17 m. Cât măsoară, împreună, cinci sărituri ale iepurelui şi cinci sărituri ale vulpii?

CAPITOLUL III
DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

III.1. Divizor. Multiplu. Divizori comuni. Multipli comuni

1. Fie a şi b două numere naturale. Spunem că **a este divizibil cu b** sau că **b îl divide pe a** dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. În acest caz, notăm $b \mid a$ (b divide pe a) sau $a \vdots b$ (a este divizibil cu b).

Dacă a este divizibil cu b, spunem că a este un **multiplu** al lui b, iar b este un **divizor** al lui a.

Dacă b este diferit de 0, atunci a este divizibil cu b dacă şi numai dacă restul împărţirii lui a la b este 0 (a se împarte exact la b).

Dacă a nu este divizibil cu b, notăm $b \nmid a$ sau $a \not\vdots\, b$.

Exemple: $2 \mid 12$, $3 \mid 63$, $13 \mid 39$, $29 \mid 0$, $0 \nmid 14$, $15 \nmid 35$.

2. Singurul număr natural care are o infinitate de divizori este 0 şi singurul număr natural care are un singur divizor este 1.

3. Orice număr natural diferit de 1 are cel puţin doi divizori: 1 şi numărul însuşi. Aceştia se numesc **divizorii improprii** ai numărului, iar ceilalţi divizori, dacă există, se numesc **divizori proprii**.

Exemple: 1 şi 18 sunt divizorii improprii, iar 2, 3, 6 şi 9 sunt divizorii proprii ai numărului 18.

4. Considerăm numerele naturale 12 şi 18.

Divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 şi 12, iar divizorii lui 18 sunt: 1, 2, 3, 6, 9 şi 18.

Divizorii comuni ai numerelor 12 şi 18 sunt: 1, 2, 3 şi 6. Observăm că toţi aceşti divizori comuni sunt divizorii celui mai mare dintre ei, adică ai lui 6.

Multiplii lui 12 sunt: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, …, iar multiplii lui 18 sunt: 0, 18, 36, 54, 72, 90, … .

Multiplii comuni ai numerelor 12 şi 18 sunt: 0, 36, 72, 108, 144, … . Există o infinitate de multipli comuni, dar toţi sunt multiplii celui mai mic dintre ei care este diferit de 0, adică ai lui 36.

Probleme rezolvate

1. Arătaţi că, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$, numărul $a = 2\cdot 5^{n+1} + 3\cdot 5^{n+5} + 5^{n-3}\cdot 5^4$ este divizibil cu 313.

Soluţie: Deoarece $a = 2\cdot 5^{n+1} + 3\cdot 5^{n+5} + 5^{n+1} = 5^{n+1}(2 + 3\cdot 5^4 + 1) = 5^{n+1}\cdot 1878 = 5^{n+1}\cdot 313\cdot 6$, rezultă că a este divizibil cu 313.

2. Trei autobuze pleacă la ora 7 din garaj şi se întorc astfel: primul peste 2 ore şi 10 minute şi pleacă din nou pe traseu peste 20 de minute, al doilea se întoarce după 1 oră şi 48 de minute şi pleacă din nou peste 12 minute, iar al treilea vine peste 1 oră şi 36 de minute şi pleacă din nou peste 4 minute. Care este următoarea oră la care cele trei autobuze vor pleca din nou în acelaşi timp din garaj?
Soluţie: Cele trei autobuze pleacă din garaj astfel: primul din 150 în 150 de minute, al doilea din 120 în 120 de minute, iar al treilea din 100 în 100 de minute. Dacă cele trei autobuze pleacă din nou împreună din garaj după x minute (de la ora 7), atunci x este un multiplu comun al numerelor 150, 120 şi 100, deci x poate fi 600, 1200 etc. Deci, următoarea oră la care cele trei autobuze vor pleca din nou în acelaşi timp este ora 17 $(7 + 10)$.

PROBLEME PROPUSE

1. Arătaţi că:
a) 46 se divide cu 2;
b) 1659 se divide cu 7;
c) 5151 se divide cu 17;
d) 1991 se divide cu 11;
e) 95 nu se divide cu 3;
f) 2297 nu se divide cu 28.

2. Arătaţi că:
a) 54 este un divizor al numărului 1566;
b) 1692 este un multiplu al numărului 47;
c) 31 nu este un divizor al numărului 962;
d) 245 nu este un multiplu al numărului 15.

3. Arătaţi că:
a) $18 \mid 3060$;
b) $308 ⋮ 77$;
c) 35 divide pe 630;
d) 2285 se divide cu 457;
e) 97 este un divizor al numărului 4656;
f) 140 este un multiplu al numărului 28.

4. Scrieţi toţi divizorii următoarelor numere naturale:
a) 13; b) 18; c) 24; d) 36.

5. Scrieţi toate numerele naturale nenule mai mici decât 100 care îndeplinesc proprietatea:
a) se divid cu 12;
b) se divid cu 18;
c) se divid cu 18, dar nu se divid cu 12;
d) se divid cu 12, dar nu se divid cu 18;
e) se divid cu 12 sau se divid cu 18;
f) se divid cu 12 şi cu 18.

6. Determinaţi toate numerele naturale divizibile cu 53, cuprinse între 300 şi 500.

7. Câte numere de două cifre sunt divizibile cu 12? Calculaţi suma acestor numere.

8. a) Scrieţi toţi multiplii numărului 13 care sunt mai mici decât 65.
b) Scrieţi toţi multiplii numărului 17 care sunt cel puţin egali cu 85 şi cel mult egali cu 170.

9. a) Aflaţi cel mai mare multiplu al numărului 9 care este mai mic decât 89.
b) Determinaţi cel mai mic multiplu al numărului 16 care este mai mare decât 272.

10. a) Determinaţi cel mai mare număr natural de trei cifre care este divizibil cu 34.
b) Determinaţi cel mai mic număr natural de patru cifre care este un multiplu al numărului 29.

11. Determinaţi toate numerele naturale de patru cifre, $\overline{abcd}$, ştiind că $\overline{ab}$ $(a \neq 0)$ este un multiplu al lui 34, iar $\overline{cd}$ $(c \neq 0)$ se divide cu 43.

12. Demonstraţi că, pentru orice număr natural n, numărul $a = 121n + 132$ este divizibil cu 11.

13. Arătaţi că numărul $a = 52n + 26m + 39$ se divide cu 13, oricare ar fi numerele naturale m şi n.

14. Determinaţi toate numerele de două cifre care împărţite la 23 dau restul egal cu 12.

15. Câte numere de trei cifre au proprietatea că împărţite la 47 dau câtul egal cu restul?

16. Arătaţi că nu există niciun număr natural n, astfel încât numărul $2n + 6$ să dividă numărul 71.

17. Arătaţi că nu există niciun număr natural n, astfel încât numărul $2n + 1$ să se dividă cu 18.

18. Determinaţi patru numere naturale impare consecutive, ştiind că suma lor este mai mică decât 100 şi se divide cu 11.

19. Demonstraţi că suma oricăror şapte numere naturale consecutive se divide cu 7.

20. Demonstraţi că numărul $a = 2^{25} - 5 \cdot 2^{20} - 2^{22}$ se divide cu 23.

21. Arătaţi că, pentru orice număr natural n, numărul $a = 2^{2n+3} \cdot 25^n - 4^n \cdot 5^{2n}$ este divizibil cu 7.

22. Fie n un număr natural nenul. Demonstraţi că numărul $a = 3^{n+2} \cdot 5^{n+1} - 17 \cdot 15^n$ se divide cu 2, 3, 4, 5, 6 şi 7.

23. Demonstraţi că, dacă $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$, atunci numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 7.

24. Demonstraţi că, dacă $4 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$, atunci numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 13.

25. Demonstraţi că toate numerele de forma $\overline{abcabc}$ se divid cu 7, cu 11 şi cu 13.

26. Demonstraţi că, dacă 4 divide suma $a + c$, atunci 4 divide şi suma $\overline{abc} + \overline{cba}$.

27. Demonstraţi că:
a) 8 divide numărul $a = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{21}$;
b) 7 divide numărul $b = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{32}$;
c) 40 divide numărul $c = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{43}$.

28. Scrieţi toţi divizorii comuni pentru fiecare dintre următoarele perechi de numere naturale:

a) 8 şi 12; b) 15 şi 24; c) 16 şi 27;
d) 13 şi 72; e) 30 şi 45; f) 24 şi 36.

29. Determinaţi cel mai mare dintre divizorii comuni pentru fiecare dintre următoarele perechi de numere naturale:

a) 8 şi 20; b) 12 şi 18; c) 9 şi 32;
d) 19 şi 20; e) 30 şi 75; f) 72 şi 144.

30. Andrei a primit cadou de ziua lui un clasor pentru timbre. El a observat că în clasor ar putea aşeza 150 de timbre, punând număr egal de timbre pe fiecare pagină, dar ar putea pune chiar şi 200 de timbre, tot cu număr egal de timbre pe fiecare pagină. Aflaţi numărul maxim de pagini pe care le poate avea clasorul lui Andrei.

31. Într-o zi, toţi nepoţii bunicii s-au adunat în grădina ei. Bunica a cules 24 de mere şi 40 de caise, pe care le-a împărţit în mod egal nepoţilor săi (fiecare dintre ei a primit acelaşi număr de mere şi acelaşi număr de caise).

a) Este posibil ca bunica să aibă şase nepoţi?
b) Aflaţi numărul maxim de nepoţi pe care îl poate avea bunica.

32. Dana împarte 75 de creioane, 50 de pixuri şi 125 de bomboane în mai multe pachete identice (fiecare pachet are acelaşi număr de creioane, acelaşi număr de pixuri şi acelaşi număr de bomboane). Determinaţi numărul maxim de astfel de pachete şi conţinutul unui pachet în acest caz.

33. Determinaţi toţi multiplii comuni mai mici decât 100 pentru fiecare dintre următoarele numere naturale:

a) 6 şi 12; b) 4 şi 9; c) 10 şi 15;
d) 12 şi 18; e) 2, 3 şi 5; f) 2, 4 şi 5.

34. Fie m un multiplu comun al numerelor naturale a şi b. Determinaţi m în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $a = 6$, $b = 15$, $0 < m < 100$;
b) $a = 20$, $b = 70$, $m \neq 0$, $m \leq 280$;
c) $a = 28$, $b = 14$, $m \neq 0$, m este minim;
d) $a = 75$, $b = 50$, $m \neq 0$, m este minim.

35. Membrii unui club sportiv îşi fac exerciţiile zilnice de gimnastică aşezaţi într-o formaţie cu mai multe rânduri egale. Niciunul dintre membri nu lipseşte niciodată de la antrenamente. În unele zile, rândurile au câte 9 sportivi, iar în alte zile rândurile sunt formate din câte 12 sportivi. Aflaţi numărul minim de sportivi înscrişi în acest club.

CUPRINS

FRACŢII ORDINARE. FRACŢII ZECIMALE

CAPITOLUL IV. FRACŢII ORDINARE

CAPITOLUL V. FRACŢII ZECIMALE

ELEMENTE DE GEOMETRIE ŞI UNITĂŢI DE MĂSURĂ

CAPITOLUL VI. PUNCTE. DREPTE. PLANE

CAPITOLUL VII. UNGHIURI

CAPITOLUL VIII. UNITĂŢI DE MĂSURĂ

RECAPITULARE FINALĂ