Coordonator VASILE POP

Vasile Pop Dana Heuberger

MATEMATICĂ DE EXCELENŢĂ

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă

Clasa a XI-a

Volumul I. Algebră

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

PARALELA 45
EDITURA

Cuvânt-înainte

Colecţia „Matematică de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă” conţine şase volume pentru liceu, destinate fiecărui an de studiu, şi se adresează tuturor pasionaţilor de matematică, de orice vârstă. Ea vine să umple un gol care există de ani de zile, cu toată inflaţia de publicaţii matematice din ultima vreme. Demersul nostru aduce îmbunătăţiri substanţiale ciclului de manuale pentru grupele de performanţă pe care le-am elaborat în anul 2003, în cadrul unui colectiv care a materializat un proiect finanţat din fonduri europene. Temele abordate în cărţile actuale tratează atât cunoştinţele din programele şcolare, necesare elevilor pentru reuşita la examenele de admitere la cele mai prestigioase universităţi din ţară şi de peste hotare, cât şi pe toate cele prezente în programa elaborată de minister pentru pregătirea olimpiadelor judeţene şi naţionale de matematică. În plus, în multe dintre capitole există şi paragrafe sau probleme care pot fi utilizate cu succes şi de către elevii care se pregătesc pentru concursurile internaţionale de matematică. De aceea, această colecţie reprezintă un adevărat îndrumar pentru elevii şi profesorii care activează în cadrul centrelor de excelenţă, atât prin conţinuturi, cât şi prin modalitatea de prezentare. Vastitatea informaţiilor pe care le-am considerat necesare unei pregătiri *de excelenţă*, precum şi relativa independenţă a unora dintre temele alese ne-au făcut ca la clasele a XI-a şi a XII-a să elaborăm câte două cărţi distincte: *Algebră* şi *Analiză matematică*.

Materialul suplimentar este prezentat complet din punct de vedere teoretic şi este urmat de multe exemple, probleme (grupate, după dificultate, în două categorii) şi teste de evaluare, care ilustrează noţiunile şi tehnicile de lucru abordate şi îl conduc pe cititor spre o mai bună înţelegere şi încadrare în sistem a cunoştinţelor pe care le are din manualele şcolare. Sperăm ca testele iniţiale, prezente la începutul fiecărei cărţi, precum şi cele finale să fie utile pentru o evaluare cât mai exactă a progresului elevilor. Mai mult decât atât, prin frumuseţea problemelor alese (unele dintre ele sunt adevărate bijuterii matematice), prin ingeniozitatea abordărilor, prin explicaţiile şi comentariile detaliate pe marginea acestora, sperăm ca aceste cărţi să contribuie la consolidarea unei gândiri matematice creative a tinerilor cititori, care să treacă dincolo de şabloane.

Dorim ca această colecţie să reprezinte o adevărată pledoarie pentru MATEMATICĂ.

Autorii

CUPRINS

CAPITOLUL 1. PERMUTĂRI

ELEMENTE TEORETICE

Cu toate că în clasa a XI-a capitolul despre permutări are un rol secundar, o bună înţelegere şi folosire a acestuia deschide calea spre o abordare cu succes, în clasa a XII-a, a structurilor algebrice. Vom revedea atunci, într-un context mai larg, multe dintre metodele şi ideile utilizate în problemele teoretice legate de permutări. Mai mult decât atât, în mulţimea permutărilor de un anumit grad vom găsi de multe ori exemple şi contraexemple sugestive legate de anumite proprietăţi ale legilor de compoziţie necomutative. Sunt doar câteva motive, puternice însă, ce recomandă o studiere atentă a temei de către toţi cei pasionaţi de algebră.

Vom trece în revistă noţiunile şi notaţiile care apar în manualele şcolare.

1. Dacă A este o mulţime nevidă, atunci orice funcţie bijectivă $f: A \to A$ se numeşte *permutare* a sa. Mulţimea $S(A)$ a tuturor permutărilor mulţimii A, împreună cu operaţia de compunere a funcţiilor, se numeşte *grupul simetric* sau *grupul substituţiilor* lui A.

Dacă pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem mulţimea $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, atunci funcţia bijectivă $f: A \to A$, $f(a_k) = a_{i_k}$, $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$ este bine determinată de funcţia bijectivă $\sigma: \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, $\sigma(k) = i_k$, $\forall\, k \in \{1, 2, ..., n\}$ şi reciproc. De aceea, este suficient să studiem comportamentul permutărilor mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$, numite şi permutări de *grad* n. Notăm cu S_n sau σ_n mulţimea permutărilor de grad n şi cu litere mici greceşti elementele sale. Ştim că S_n are $n!$ elemente.

Permutarea $\sigma \in S_n$ se reprezintă astfel: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

σ fiind o funcţie bijectivă, avem: $\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)\} = \{1, 2, ..., n\}$.

2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, funcţia identică a mulţimii $A = \{1, 2, ..., n\}$ se notează cu

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}$$

şi se numeşte *permutarea identică de gradul* n.

Deoarece mulţimea $S_1 = \{e\}$ conţine doar permutarea identică, atunci când nu vom specifica altfel, vom considera, *în tot capitolul*, că avem de a face cu mulţimea S_n, cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

CAPITOLUL 4. DETERMINANŢI SPECIALI

CONSIDERAŢII TEORETICE

4.1.1. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice pătratică, numărul

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

se numeşte determinantul matricei A.

4.1.2 Dacă $A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{(m,n)}(\mathbb{C})$ este o matrice şi k este un număr natural, $1 \le k \le m,\ 1 \le k \le n,$ un determinant de forma

$$\Delta_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ j_1,\ldots,j_k}} = \det \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{bmatrix},$$

unde $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m,\ 1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n,$ se numeşte minor de ordin k al matricei A.

4.1.3. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice pătratică, numărul

$$A_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ j_1,\ldots,j_k}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} \Delta_{\substack{i_{k+1},\ldots,i_n \\ j_{k+1},\ldots,j_n}}$$

se numeşte complementul algebric al minorului $\Delta_{\substack{i_1,\ldots,i_k \\ j_1,\ldots,j_k}}$.

$(\{i_1,\ \ldots,\ i_k,\ i_{k+1},\ \ldots,\ i_n\} = \{j_1,\ \ldots,\ j_k,\ j_{k+1},\ \ldots,\ j_n\} = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}.)$

În particular, pentru $k = 1$ notăm cu Δ_{ij} minorul complementar al minorului (elementului) a_{ij}, iar cu A_{ij} complementul algebric.

4.1.4. Dacă $A_* = [A_{ij}]^t_{i,\, j=\overline{1,\, n}}$ se numeşte reciproca matricei A.

4.1.5. Teoremă. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi A_* este reciproca ei, atunci

$$A \cdot A_* = A_* \cdot A = (\det A) \cdot I$$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \det A$ (dezvoltarea determinantului după coloana j)

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \det A$ (dezvoltarea determinantului după linia i).

Dacă $\det A \ne 0,$ atunci matricea A este inversabilă şi inversa ei este

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_*.$$

CAPITOLUL 5. MATRICE CU BLOCURI. RANGUL UNEI MATRICE

5.1. MATRICE CU BLOCURI

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}),\ m \geq 2,\ n \geq 2.$

5.1.1. Definiţie. O succesiune de k linii consecutive din matricea A ($k \leq m$) se numeşte **bandă orizontală** de lăţime k şi se pune în evidenţă prin încadrarea acestor linii între două drepte orizontale (duse printre câte două linii ale matricei A).

O succesiune de k coloane consecutive din matricea A ($k \leq n$) se numeşte **bandă verticală** de lăţime k şi se pune în evidenţă prin încadrarea acestor coloane între cele două drepte verticale (duse printre câte două coloane ale matricei A).

Dacă matricea A este partiţionată în p benzi orizontale şi q benzi verticale, orice matrice aflată la intersecţia unei benzi orizontale cu o bandă verticală se numeşte **bloc** al matricei A. Dacă notăm blocurile cu A_{ij}, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, atunci matricea A se reprezintă ca **matrice cu blocuri** sub forma:
$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{p_1} & A_{p_2} & \dots & A_{pq} \end{array}\right].$$

5.1.2. Observaţie. În matricea cu blocuri $A = [A_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,q}}}$ toate matricele A_{i1}, A_{i2}, …, A_{iq} au acelaşi număr de linii şi toate matricele A_{1j}, A_{2j}, …, A_{pj} au acelaşi număr de coloane.

Blocurile de dimensiune (1, n) sunt linii ale matricei A, blocurile de dimensiune (m, 1) sunt coloane ale matricei A, blocurile de dimensiune (1, 1) sunt elemente ale matricei A.

5.1.3. Adunarea matricelor cu blocuri

Dacă matricele de acelaşi tip $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt la fel partiţionate în blocuri:
$$A = [A_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,q}}} = B = [B_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,q}}}$$
şi blocurile A_{ij} şi B_{ij} au aceeaşi dimensiune ($i = \overline{1,p},\ j = \overline{1,q}$), atunci **adunarea matricelor** A şi B se face evident după formula: $A + B = C = [C_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,p}\\ j=\overline{1,q}}}$,

unde $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij},\ i = \overline{1,p},\ j = \overline{1,q}.$

TESTE FINALE

TESTUL F.1

F.1.1. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu A inversabilă şi astfel ca $(A-B)\cdot C = B\cdot A^{-1}$. Arătaţi că $C\cdot(A-B) = A^{-1}\cdot B$.

F.1.2. Fie $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât pentru orice $X\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ există $N_X\in \mathbb{N}^*$ astfel ca $A^{N_X}\cdot X = 0$. Arătaţi că $A^n = 0$.

F.1.3. Fie $A, B\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ două matrice cu proprietatea că $A^2 + B^2 = 2AB$.
Demonstraţi că:
a) $AB = BA$.
b) $Tr(A) = Tr(B)$.

TESTUL F.2

F.2.1. Fie $m,n\in \mathbb{N}^*$ şi $A\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Arătaţi că:

a) $A\cdot A^t = O_m \Leftrightarrow A = O_{m,n}$.

b) Dacă $m\le n$, există $A\in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ astfel încât $\det\left(A\cdot A^t\right)\neq 0$.

c) Dacă $m > n$, atunci $\det\left(A\cdot A^t\right) = 0$.

Ovidiu T. Pop

F.2.2. Fie $A, B\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $Tr\left(A\cdot A^t + B\cdot B^t\right) = Tr\left(A\cdot B + A^t\cdot B^t\right)$.

Arătaţi că $A = B^t$.

F.2.3. Fie $A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ o matrice cu elementele numere strict pozitive.

Numim „transformare” înlocuirea tuturor elementelor de pe o linie sau de pe o coloană cu inversele lor. Arătaţi că putem efectua o succesiune de „transformări” care modifică matricea A în matricea B, cu proprietatea că produsul tuturor elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană este cel puţin egal cu 1.

Vasile Pop