Petre Năchilă
Cătălin Eugen Năchilă

Ora de matematică

Clasa a XI-a

Editura NOMINATRIX
2019

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele şcolare în vigoare.

Referent ştiinţific: Ana Cârstoveanu

Editor: Ovidiu Bărbulescu

Comenzi: **Marius Dorbin (**0722. 319. 653)

http://www.librarianominatrix.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NĂCHILĂ, PETRE
Ora de matematică : clasa a XI-a / Petre Năchilă, Cătălin Eugen Năchilă. - Bascov : Nominatrix, 2019
ISBN 978-606-8873-04-6

I. Năchilă, Cătălin

51

Copyright © Editura Nominatrix, 2019
Toate drepturile aparțin Editurii Nominatrix.

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Capitolul 1
PERMUTĂRI

1.1. Permutări

Definiţie. Fie A mulțime nevidă finită. Orice funcție bijectivă $f : A \to A$ se numeşte *permutare* a mulțimii A.

Teoremă. Fie A mulțime finită cu n elemente ($n \in \mathbb{N}^*$). Atunci mulțimea $\{f : A \to A \mid f \text{ bijectivă}\}$ are $n!$ elemente.

Denumirea de permutare vine din limba latină: „permutare" – a muta unul față de altul, formula pentru P_n (numărul permutărilor de n elemente, $P_n = n!$) a fost dată de L. Gherşonide în 1321, iar termenul a fost propus de André Tacquet (1612 – 1660).

Observaţii: 1. Dacă A este mulțime finită nevidă şi $f : A \to A$, atunci avem:

$$f \text{ bijectivă} \Leftrightarrow f \text{ injectivă} \Leftrightarrow f \text{ surjectivă}.$$

2. Deoarece compunerea a două funcții bijective este tot o funcție bijectivă, putem considera $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Orice funcție bijectivă $\sigma : A \to A$ se numeşte permutare (substituție) de n elemente (de gradul n).

Notaţii: $S_n = \{\sigma : A \to A \mid \sigma \text{ bijectivă}\}$. Avem card $S_n = n!$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Permutările vor fi notate cu literele greceşti σ, φ, θ, π, τ etc.

Observaţie: $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = A$.

Funcția identică $1_A : A \to A$ este permutare, numită permutarea identică şi o notăm cu e. Avem $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

Exemplu. S_3 are $3! = 6$ elemente. Avem:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, atunci $\sigma \circ \tau$ (notată şi $\sigma\tau$) este tot permutare de gradul n numită compunerea (sau produsul) permutărilor σ şi τ (în această ordine).

Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \tau(1) & \tau(2) & ... & \tau(n) \end{pmatrix}$, atunci avem:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & ... & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

Notaţie: $\sigma^2 = \sigma\sigma$, $\sigma^3 = \sigma^2\sigma$, $\sigma^4 = \sigma^3\sigma$, …, $\sigma^n = \sigma^{n-1}\sigma$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu: Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atunci avem:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că în general înmulţirea (produsul) nu este comutativă (comutativ). Nu se poate efectua decât produsul a două permutări de acelaşi grad.

Proprietăţile compunerii permutărilor

- Compunerea permutărilor este asociativă: $(\sigma \circ \tau) \circ \theta = \sigma \circ (\tau \circ \theta)$, $\forall\ \sigma, \tau, \theta \in S_n$.
- Permutarea identică de gradul n este element neutru pentru compunerea permutărilor (din S_n): $\sigma e = e\sigma = \sigma$, $\forall\ \sigma \in S_n$.
- Orice permutare are o inversă: $\forall\ \sigma \in S_n$, $\exists\ \sigma^{-1} \in S_n$, astfel încât $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

Exemple: a) $e^{-1} = e$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\sigma^{-m} = (\sigma^{-1})^m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Definiţie. Fie $i, j \in A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $i \neq j$. Funcţia $\tau_{ij} : A \to A$ (notată şi (ij)) definită prin $\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j, & k = i \\ i, & k = j \\ k, & k \neq i,\ k \neq j \end{cases}$ se numeşte *transpoziţie*. Avem deci

$$\tau_{ij} = (ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & i-1 & i & i+1 & ... & j-1 & j & j+1 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & i-1 & j & i+1 & ... & j-1 & i & j+1 & ... & n \end{pmatrix}$$

Proprietăţile transpoziţiilor

1. $(ij) = (ji)$ **2.** $(ij)^{-1} = (ij)$ **3.** $(ij)^2 = e$

4. Numărul tuturor transpoziţiilor de gradul n este $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $n \geq 2$.

Exemple: 1. Transpozițiile de gradul 3 sunt (1 2), (1 3), (2 3).
2. Transpozițiile de gradul 4 sunt (1 2), (1 3),(1 4), (2 3), (2 4), (3 4).

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați mulțimea $\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Soluție. $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$\sigma^3 = \sigma^2\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

$\sigma^4 = \sigma^3\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$.

Prin inducție se demonstrează că $\sigma^{4k+r} = \sigma^r$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Deci $\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$.

2. Demonstrați că pentru orice $\sigma \in S_n$ există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = e$.

Soluție. Dacă $n = 1$ avem $S_1 = \{e\}$ şi luăm $p = 1$. Dacă $n = 2$, luăm $p = 1$ dacă $\sigma = e$ şi $p = 2$ dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Fie $n \geq 3$ şi $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$ (dacă $\sigma = e$ luăm $p = 1$). Atunci $\sigma^m \in S_n$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$. Deoarece mulțimea S_n este finită (are $n!$ elemente), rezultă că există $m, t \in \mathbb{N}^*$, $m < t$ astfel încât $\sigma^m = \sigma'$. Atunci $\sigma^{t-m} = \sigma^t \cdot (\sigma^{-1})^m = e$. Luăm deci $p = t - m$.

3. Determinați permutările $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, ştiind că numerele $1 + \sigma(1)$, $2 + \sigma(2)$, $3 + \sigma(3)$, …, $n + \sigma(n)$ formează o progresie aritmetică.

Soluție. Pentru orice $k = \overline{2, n-1}$ avem $(k - 1 + \sigma(k - 1)) + (k + 1 + \sigma(k + 1)) = 2(k + \sigma(k))$ şi deci $\sigma(k - 1) + \sigma(k + 1) = 2\sigma(k)$. Deci numerele $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, …, $\sigma(n)$ formează o progresie aritmetică.

Dacă rația este pozitivă, atunci $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(n)$ şi atunci $\sigma(n) = n$. Într-adevăr, dacă $\sigma(n) \neq n$, există k, $1 \leq k < n$ astfel încât $\sigma(n) = k$ şi există t, $1 \leq t < n$, astfel încât $\sigma(t) = n$. Atunci $\sigma(n) < \sigma(t)$, unde $t < n$ (contradicție). Analog se arată că $\sigma(i) = i$, $1 \leq i < n - 1$ şi deci $\sigma = e$.

Dacă progresia este descrescătoare, adică $\sigma(1) > \sigma(2) > \ldots > \sigma(n)$, avem $\sigma(1) = n$, $\sigma(2) = n - 1$, …, $\sigma(n) = 1$ şi deci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $\sigma\tau$ şi $\tau\sigma$.

b) Determinați $m, n \in \mathbb{N}^*$ minime pentru care $\sigma^m = \tau^n = e$.

2. Determinați toate transpozițiile de gradul 5.

3. Rezolvați în S_4 ecuațiile:

a) $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Determinați permutările $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, ştiind că numerele $1 + \sigma(1)$, $2 + \sigma(2)$, …, $n + \sigma(n)$ formează o progresie geometrică.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Determinați $\sigma \in S_n$ în cazurile:

a) $1 + \sigma(1) = 2 + \sigma(2) = \ldots = n + \sigma(n)$;

b) $\sigma(1) - 1 = \sigma(2) - 2 = \ldots = \sigma(n) - n$;

c) $\sigma(1) \cdot 1 - \sigma(2) \cdot 2 = \ldots = n\sigma(n)$.

6. Rezolvați în S_5 ecuațiile:

a) $\sigma^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, unde $n \in \{3, 4, 5\}$;

b) $\sigma\tau = \tau\sigma$, unde $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Fie numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < a_3$. Determinați (în fiecare caz) permutarea $\sigma \in S_3$ pentru care:

a) suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} a_i a_{\sigma(i)}$ este maximă, respectiv minimă;

b) suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este maximă, respectiv minimă.

c) suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{3} (a_i - a_{\sigma(i)})^2$ este maximă, respectiv minimă.

8. Determinați σ^{100}, σ^{201}, σ^{302}, unde:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Determinați σ pentru care:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Fie $\overline{a_1a_2a_3a_4} = 4123$. Determinați suma $\sum\limits_{\sigma \in S_4} \overline{a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)}}$.

11. Se consideră numerele $x = 4675$, $y = 24365$.

a) Câte numere distincte se obțin permutând cifrele numerelor x și y?

b) Al câtelea număr este în ordine crescătoare (respectiv descrescătoare) fiecare din numerele x şi y când se efectuează toate permutările posibile ale cifrelor celor două numere?

12. Se consideră numerele $x = 4225$ şi $y = 43556$.

a) Câte numere distincte se obțin permutând toate cifrele numerelor x şi y?

b) Calculați în fiecare caz în parte suma tuturor numerelor obținute.

13. Se consideră numerele $0 < x_1 < x_2 < x_3$. Determinați permutarea $\sigma \in S_3$ pentru care suma:

a) $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ este maximă;

b) $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ este minimă;

c) $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i x_{\sigma(i)}}$ este maximă;

d) $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i x_{\sigma(i)}}$ este minimă;

e) $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{3} \left(x_i - x_{\sigma(i)}\right)^3$ este maximă;

b) $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{3} \left(x_i - x_{\sigma(i)}\right)^3$ este minimă.

14. Se consideră numerele $0 < x_1 < x_2 < x_3$. Determinați permutarea $\sigma \in S_3$ pentru care avem $x_1x_{\sigma(1)} < x_2x_{\sigma(2)} < x_3x_{\sigma(3)}$.

15. Demonstrați că pentru orice permutare $\sigma \in S_3$ avem $\sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\sigma(i)}{i^2} \geq \frac{11}{6}$.

16. Fie numerele x_1, x_2, x_3 din intervalul $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Demonstrați că pentru orice $\sigma \in S_3$ avem: $\left(x_1 + \frac{1}{x_{\sigma(1)}}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_{\sigma(2)}}\right)\left(x_3 + \frac{1}{x_{\sigma(3)}}\right) < \frac{125}{8}$.

17. Fie $H \subset S_n$, $H \neq \varnothing$, cu proprietatea că oricare ar fi $\sigma, \theta \in \mathbb{N}$, avem $\sigma\theta \in H$. Demonstrați că:

a) $e \in H$;

b) dacă $\sigma \in H$, atunci $\sigma^{-1} \in H$.

1.2. Inversiunile unei permutări

Definiţie. Se numeşte *inversiune* a permutării $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, o pereche (ij) cu proprietățile $1 \leq i < j \leq n$ şi $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Observaţii.

1. Perechea (i, j) este inversiune a permutării $\sigma \Leftrightarrow \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} < 0$.

2. Numărul inversiunilor permutării σ se notează cu $\mathrm{Inv}(\sigma)$ (sau cu $m(\sigma)$. Avem atunci $m(e) = 0$ şi $m(\sigma) \in \mathbb{N}^*$ pentru orice $\sigma \neq e$.

3. Numărul maxim de inversiuni este $\dfrac{n(n-1)}{2}$ şi se obține pentru permutarea:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$, adică pentru permutarea σ definită prin:

$\sigma(k) = n - k + 1,\ k = \overline{1,n}$.

Definiţie. Permutarea σ se numeşte *permutare pară* (*impară*) dacă $m(\sigma)$este număr par (respectiv impar).

Definiţie. Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numeşte *signatura* permutării σ.

Observaţii:

1. Pentru orice $\sigma \in S_n$ avem $\varepsilon(\sigma) = 1$ sau $\varepsilon(\sigma) = -1$.

2. Permutarea σ este permutare pară $\Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = 1$.

Permutarea σ este permutare impară $\Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = -1$.

Teoremă. Orice transpoziție este permutare impară.

Demonstrație. Fie transpoziția (ij) cu $1 \leq i < j \leq n$. Dacă $k < i$ avem $\tau_{ij}(k) = k < j = \tau_{ij}(i)$ şi deci (k, i) nu este inversiune. Analog perechea (j, k) cu $j < k$ nu este inversiune. Fie $i < k < j$. Deoarece $\tau_{ij}(i) = j > k = \tau_{ij}(k)$, rezultă că perechile (i, j) şi (k, j) sunt inversiuni. Deoarece şi (i, j) este inversiune, rezultă că $m(\tau_{ij}) = 2(j - i - 1) + 1 = 2(j - i) - 1$ şi atunci $m(\tau_{ij}) = -1$.

Teoremă. Dacă $\sigma \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.

Demonstrație. Produsul definit în teoremă conține C_n^2 factori. Fie factorul $\dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$, unde $1 \leq i < j \leq n$. Fie $\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = p$. Avem evident $k \neq p$ şi atunci $\sigma(i) - \sigma(j) = k - p \neq 0$. Numărul $k - p$ apare în factorul $\dfrac{\sigma(k)-\sigma(p)}{k-p}$ dacă $k < p$ sau în factorul $\dfrac{\sigma(p)-\sigma(k)}{p-k}$ dacă $p < k$, după cum (i, j) este inversiune sau nu este inversiune. Prin simplificare obținem -1 de un număr de ori egal cu numărul de inversiuni ale permutării σ. Deci produsul este $\varepsilon(\sigma)$.

Teoremă. Pentru orice $\sigma, \tau \in S_n$ avem $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ (signatura produsului a două permutări este egală cu produsul signaturilor celor două permutări).

Demonstrație. $\varepsilon(\sigma\tau) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} \left(\dfrac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \dfrac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \right) =$

$= \left(\prod\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \right) \cdot \left(\prod\limits_{1 \le i < j \le n} \dfrac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \right) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau).$

Consecinţă. Fie $\varepsilon, \tau \in S_n$. Atunci avem:

a) $\sigma\tau$ este permutare pară $\Leftrightarrow$ σ şi τ sunt ambele pare sau ambele impare;

b) $\sigma\tau$ este permutare impară $\Leftrightarrow$ σ şi τ sunt de parități diferite.

Teoremă. Orice permutare din S_n, $n \ge 2$, este un produs de transpoziții.

Consecinţă. Orice permutare pară (respectiv impară) este produsul unui număr par (respectiv impar) de transpoziții.

Observaţie. Numărul permutărilor pare, respectiv impare, din S_n, $n \ge 2$, este $\dfrac{n!}{2}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Determinați signatura permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluție. În cele ce urmează se consideră numerele de pe linia a doua. Înaintea numărului 1 se află numerele 4 şi 3. Avem deci două inversiuni: (1, 3) şi (2, 3) (s-au luat numerele corespunzătoare de pe prima linie). Tăind numărul de pe linia a doua, mai rămân numerele 4, 3, 5, 2. Luând numărul 2, înaintea lui se află numerele 4, 3, 5. Avem deci inversiunile (1, 5), (2, 5), (4, 5). Analog se determină inversiunea (1, 2). Rezultă că $m(\varepsilon) = 6$, $\varepsilon(\sigma) = 1$.

2. Rezolvați ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluție. Fie $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Deoarece $m(\tau) = 7$, rezultă că τ este permutare impară. Deoarece σ^2 este permutare pară ($\varepsilon(\sigma^2) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma) = 1$), rezultă că ecuația $\sigma^2 = \tau$ nu are soluție.

3. Scrieți permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ca produs de transpoziții.

Soluție. Considerăm transpoziția $(1\ 5) = \tau_1$. Fie $\sigma_1 = \tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Considerăm transpoziția (1 4) = τ_2. Fie $\sigma_2 = \tau_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Considerăm transpoziția (1 2) = τ_3. Fie $\sigma_3 = \tau_3\sigma_2 = e$. Rezultă că $\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = e$ şi deci $\sigma = \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1} =$ = (1 5)(1 4)(1 2).

4. Fie $\sigma \in S_{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$.

a) Determinați numărul inversiunilor permutării σ.

b) Determinați n, ştiind că σ este permutare pară.

Soluție. a) Numerele 1, 3, 5, …, $2n - 1$ sunt scrise în ordine crescătoare (pe a doua linie). În fața numerelor 2, 4, 6, …, $2n - 2$ sunt scrise $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, …, respectiv 1 număr mai mare. Deci $m(\sigma) = (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

b) Avem $m(\sigma)$ număr par $\Leftrightarrow n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$ sau $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați signatura permutărilor:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & i & 1 & 6 & j & 5 \end{pmatrix}$.

2. Scrieți ca produs de transpoziții următoarele permutări:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Rezolvați ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Determinați permutările $\sigma \in S_n$ pentru care $m(\sigma) = 3$.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ număr impar. Demonstrați că pentru orice $\sigma \in S_n$ există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $k + \sigma(k)$ să fie număr par.

6. Fie $\sigma \in S_{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-3 & 2n-1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $m(\sigma)$.

b) Determinați n, ştiind că σ este permutare impară.

7. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că $\sigma \in S_{2n}$ este permutare pară:

a) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n & n+1 & n+2 & ... & 2n-1 & 2n\\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & ... & 1 & 2n & 2n-2 & ... & 4 & 2\end{pmatrix}$;

b) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n & n+1 & n+2 & ... & 2n-1 & 2n\\ 2n & 2n-2 & 2n-4 & ... & 2 & 2n-1 & 2n-3 & ... & 3 & 1\end{pmatrix}$;

c) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & ... & 2n-1 & 2n\\ 2n-1 & 2n & 2n-3 & 2n-2 & ... & 1 & 2\end{pmatrix}$.

8. Determinați numărul de inversiuni ale permutării $\sigma\in S_{3n}$:

a) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n & n+1 & n+2 & ... & 2n-1 & 2n & 2n+1 & ... & 3n-1 & 3n\\ 3 & 6 & 9 & ... & 3n & 1 & 4 & ... & 3n-2 & 2 & 5 & ... & 3n-4 & 3n-1\end{pmatrix}$;

b) $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n & n+1 & n+2 & ... & 2n-1 & 2n & 2n+1 & ... & 3n-1 & 3n\\ 1 & 4 & 7 & ... & 3n-2 & 2 & 5 & ... & 3n-1 & 3 & 6 & ... & 3n-3 & 3n\end{pmatrix}$.

9. Știind că permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n-1 & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_{n-1} & \alpha_n\end{pmatrix}$ are m inversiuni, determinați numărul de inversiuni ale permutării $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n-1 & n\\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & ... & \alpha_2 & \alpha_1\end{pmatrix}$.

10. Rezolvați ecuațiile:

a) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\circ\sigma\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}\circ\sigma\circ\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

11. Fie permutarea $\sigma\in S_n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Demonstrați că:

a) există $k\in\mathbb{N}^*$, $k\leq n$, astfel încât $\sigma^k=e$;

b) dacă există $m, p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^m=\sigma^p$, atunci $\sigma^{(m,p)}=e$;

c) dacă m este cel mai mic număr din $\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\sigma^m=e$, atunci pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\sigma^p=e$ avem $m\mid p$.

12. Determinați permutarea $\sigma\in S_n$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, pentru care numerele $1+\sigma(1)$, $2+\sigma(2)$, …, $n+\sigma(n)$ formează o progresie aritmetică.

13. Determinați permutarea $\sigma\in S_n$, $n\geq 2$, pentru care $|\sigma(1)-1|=|\sigma(2)-2|=\ldots=$ $=|\sigma(n)-n|$.

14. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, $\sigma\in S_n$. Demonstrați că dacă $\sigma\tau=\tau\sigma$ pentru orice $\tau\in S_n$, atunci $\sigma=e$.

15. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Fie $\sigma, \tau\in S_n$ având proprietățile:

i) dacă există $k\in\mathbb{N}$, $1\leq k\leq n$ astfel încât $\sigma(k)\neq k$, atunci $\tau(k)=k$;

ii) dacă există $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ astfel încât $\tau(k) \ne k$, atunci $\sigma(k) = k$.

Demonstrați că $\sigma\tau = \tau\sigma$.

16. Fie numerele $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$. Determinați permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma:

a) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ este maximă; b) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ este minimă;

c) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i x_{\sigma(i)}}$ este maximă; d) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i x_{\sigma(i)}}$ este minimă;

e) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{\sigma(i)}\right)^2$ este maximă; b) $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{\sigma(i)}\right)^2$ este minimă.

17. Fie $a > 0$ şi numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din intervalul $(0, a)$. Demonstrați că pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ există i, $1 \le i \le n$, astfel încât $4x_i(a - x_{\sigma(i)}) \le a^2$.

18. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, şi numerele $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $0 > b_1 > b_2 > \ldots > b_n$. Demonstrați că pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ avem:

$$a_1b_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n \ge a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \ldots + a_nb_{\sigma(n)}.$$

19. Demonstrați că orice permutare este un produs de transpoziții de forma (1, 2), (1, 3), (1, 4), …, (1, n).

20. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$. Demonstrați că pentru, orice permutare $\sigma \in S_n$ avem $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

21. Fie $\sigma \in S_n$, $n \ge 3$. Demonstrați că dacă $\sigma\theta = \theta\sigma$ pentru orice $\theta \in S_n$, atunci $\sigma = e$.

22. Studiați surjectivitatea funcției $f : S_4 \to S_4, f(\sigma) = \sigma^4$.

23. Fie numerele strict pozitive $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $n \ge 3$. Determinați permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_{\sigma(k)}}$ este maximă, respectiv minimă.

24. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ şi fie p, q divizori naturali ai lui n. Demonstrați că ecuațiile $\sigma^p = e$ şi $\sigma^q = e$ au o singură soluție comună în S_n dacă şi numai dacă $(p, q) = 1$.

25. Fie $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in S_n$. Definim $\overline{\sigma}$ prin $\overline{\sigma}(i) = \sigma(n - i + 1)$, $\forall\ i = \overline{1,n}$.

a) Determinați $\overline{\sigma}$ pentru $n = 4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că $m(\sigma) + m(\overline{\sigma}) = C_n^2$, $\forall\ \sigma \in S_n$.

c) Calculați $\sum_{\sigma \in S_n} m(\sigma)$.

Capitolul 2
MATRICE

2.1. Mulțimi de matrice

O bancă comercială doreşte să analizeze situația încasărilor şi plăților efectuate în decurs de o săptămână (în milioane de unități monetare) de către trei filiale (notate *A*, *B*, *C*) ale sale. Tabelul în care sunt trecute cele trei filiale şi zilele săptămânii (de luni până sâmbătă inclusiv), care sunt notate cu numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 poate fi prezentat în două moduri:

Ziua / **Filiala**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	24	21	22	19	–18	–4
B	15	18	16	10	3	2
C	10	–2	1	8	9	–1

Filiala / **Ziua**	***A***	***B***	***C***
1	24	15	10
2	21	18	–2
3	22	16	1
4	19	10	8
5	–18	3	9
6	–4	2	–1

Luând filiala *A* şi zilele 4, respectiv 6, datele din tabel semnifică faptul că în ziua 4 erau în casa de bani cu 19 milioane unități monetare mai mult decât în ziua 3, iar în ziua 6 erau cu 4 milioane unități monetare mai puțin decât în ziua 5.

Pentru filiala *B* situația poate fi prezentată în două moduri:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 15 & 18 & 16 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ sau } \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 18 \\ 3 & 16 \\ 4 & 10 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Considerând cunoscută semnificația din tabel a numerelor 1, 2, 3, 4, 5, 6, pentru filiala *B* avem următoarele reprezentări:

$$\begin{pmatrix} 15 & 18 & 16 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix} 15 \\ 18 \\ 16 \\ 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dacă considerăm cunoscute semnificaţiile pentru A, B, C şi numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, respectând ordinea acestora, obţinem următoarele tabele „centralizatoare”:

$$\begin{pmatrix} 24 & 21 & 22 & 19 & -18 & -4 \\ 15 & 18 & 16 & 10 & 3 & 2 \\ 10 & -2 & 1 & 8 & 9 & -1 \end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix} 24 & 15 & 10 \\ 21 & 18 & -2 \\ 22 & 16 & 1 \\ 19 & 10 & 8 \\ -18 & 3 & 9 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cele două „tablouri” poartă numele de *matrice*. Prima matrice are 3 linii şi 6 coloane, iar a doua matrice are 6 linii şi 3 coloane. Cele 18 numere se numesc *elemente* ale matricei şi sunt notate cu a_{ij}, unde indicele i, respectiv j, reprezintă numărul liniei, respectiv numărul coloanei din matrice pe care se află elementul. În prima matrice avem $a_{23} = 16$, iar în a doua matrice avem $a_{53} = 9$.

Definiţie. Fie $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi fie $K \subset \mathbb{C}$, $K \neq \varnothing$. O funcţie $A : M \times N \to K$ se numeşte *matrice* cu m linii şi n coloane cu elemente din K.

Notând $A((i, j)) = a_{ij} \in K$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, $\forall\ j = \overline{1,n}$, matricea se scrie sub forma:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

Noţiunea de matrice a fost introdusă de Arthur Cayley (1821 – 1895) în 1858. El a folosit notaţia $A = \left\|a_{ij}\right\|_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$. Alte notaţii au fost propuse de C.E. Cullis (în 1913): $A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, respectiv de Maxime Bocher (1867 – 1918), $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$.

Vom folosi în continuare notaţia lui Bocher.

Mulţimea tuturor matricelor cu m linii şi n coloane (matrice de tip (m, n) cu elemente din K se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Dacă $m = n$, matricea A se numeşte *matrice pătratică* de ordinul n.

Mulţimea matricelor pătratice de ordin n cu elemente din K se notează cu $\mathcal{M}_n(K)$. Atunci $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ reprezintă mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane cu elemente din $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{C}$. Mulţimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente din $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ se notează cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, respectiv $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Observăm că $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, respectiv $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sistemul ordonat $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ se numeşte *diagonala principală* a matricei pătratice A, iar sistemul ordonat $(a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1})$ se numeşte *diagonală secundară* a matricei pătratice A.

Dacă $m = 1$, avem matricea-linie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Dacă $n = 1$, avem matricea-coloană $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Dacă $m = n = 1$, avem matricea $A = (a_{11})$.

Suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice (pătratice) se numeşte *urma matricei A* şi se notează cu $\mathrm{Tr}(A)$. Avem $\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Definiţie. Spunem că matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $K \subset \mathbb{C}$, $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ sunt egale dacă $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\, i = \overline{1,m}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$.

Cazuri particulare de matrice

Vom considera în continuare $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

1. Dacă $a_{ij} = 0$, $\forall\, i = \overline{1,m}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, matricea A se numeşte *matricea nulă*. Notăm $A = O_{m,n}$. Dacă $m = n$, matricea nulă se notează O_n.

2. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $a_{ij} \neq 0$, $\forall\, i = \overline{1,m}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, matricea se numeşte *matrice diagonală*. Un caz particular de matrice diagonală este *matricea unitate* notată cu I_n în care $a_{ii} = 1$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, şi $a_{ij} = 0$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$ şi $i \neq j$.

3. Dacă $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, matricea A se numeşte *matrice simetrică*.

4. Dacă $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, matricea A se numeşte *matrice antisimetrică*.

5. Dacă $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, matricea $B = (b_{kh}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ pentru care $b_{ji} = a_{ij}$, $\forall\, i = \overline{1,m}$, $\forall\, j = \overline{1,n}$, se numeşte *transpusa* matricei A. Notăm $B = A^t$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$, ştiind că $A = B$, unde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3x+y & x^2+2 \\ 2x & y^2 & x+3y \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} x^2 & 10 & y^2-10 \\ x+2 & 16 & 14 \end{pmatrix}.$$

Soluţie. Rezolvând sistemul $4 = x^2$, $3x + y = 10$, $x^2 + 2 = y^2 - 10$, $2x = x + 2$, $y^2 = 16$, $x + 3y = 14$ obţinem $x = 2$, $y = 4$.

2. Determinați:

a) mulțimea X a matricelor simetrice, $X \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

b) mulțimea Y a matricelor antisimetrice, $Y \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

c) $X \cap Y$.

Soluție. a) $x = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & x & y \\ c & y & t \end{pmatrix} \mid a,b,c,x,y,t \in \mathbb{R} \right\}$; b) $x = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} \mid x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$;

c) Din $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall\ i = \overline{1,n}$, $\forall\ j = \overline{1,n}$, rezultă că $a_{ij} = 0$. Atunci $X \cap Y = \{O_3\}$.

3. Determinați matricele $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ definite prin:

$$a_{ij} = \begin{cases} -C_j^i, & j > i \\ C_i^j, & i \geq j, \forall i = \overline{1,2},\ \forall j = \overline{1,4} \end{cases}.$$

Soluție. $A = \begin{pmatrix} C_1^1 & -C_2^1 & -C_3^1 & -C_4^1 \\ C_2^1 & C_2^2 & -C_3^2 & -C_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

4. a) Determinați matricele $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ definite prin $a_{ij} = C_{i+j}^i$ pentru $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

b) Determinați suma tuturor elementelor matricelor A_3, respectiv A_4.

Soluție. a) $A_n = \begin{pmatrix} C_2^1 & C_3^1 & C_4^1 & \cdots & C_{n+1}^1 \\ C_3^2 & C_4^2 & C_5^2 & \cdots & C_{n+2}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n+1}^n & C_{n+2}^n & C_{n+3}^n & \cdots & C_{n+n}^n \end{pmatrix}$;

b) Suma elementelor matricei A_3 este $C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 =$ $= 62$. Analog se arată că suma elementelor lui A_4 este 242.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați matricele A, $B \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ ale cărei elemente sunt date de $a_{ij} = (-1)^{i+j}$, respectiv $b_{ij} = (-1)^{i+j}|i - j|$, $\forall\ i = \overline{1,3}$, $\forall\ j = \overline{1,3}$.

2. Determinați matricele pătratice de ordinul n, $n \geq 2$, ale cărei elemente sunt date de $a_{ij} = \min(i, j)$, respectiv $b_{ij} = \max(i, j)$, $\forall\ i = \overline{1,n}$, $\forall\ j = \overline{1,n}$.

3. Determinați matricele simetrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, știind că suma pătratelor elementelor sale este 4.

4. Determinați matricele antisimetrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, știind că suma pătratelor elementelor sale este 12.

5. a) Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. În ce condiții putem avea $A^t = A$?

b) Determinați matricele pătratice de ordin 3, respectiv 4 pentru care $A^t = A$.

c) Demonstrați că pentru orice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avem $(A^t)^t = A$.

6. Dați exemple de matrice diagonale A pentru care $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

7. Fie X, Y mulțimea matricelor-linie, respectiv a matricelor-coloană având elementele din $\mathbb{Z}$. Determinați:

a) $X \cap Y$;

b) mulțimea tuturor matricelor $A \in X \cap Y$ pentru care suma tuturor pătratelor elementelor acestor matrice este 5.

2.2. Adunarea matricelor

Definiție. Fie matricele $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Suma matricelor A, B este matricea notată cu $A + B$, $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, $\forall\ j = \overline{1,n}$.

Observații:

1. Se adună numai matrice de același tip.

2. Adunarea matricelor se reduce la adunarea numerelor (întregi, raționale, reale sau complexe). Rezultă că avem următoarea:

Teoremă. Adunarea matricelor are proprietățile:

a) este comutativă: $A + B = B + A$, $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

b) este asociativă: $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

c) matricea nulă $O_{m,n}$ este element neutru (pentru adunarea matricelor):

$$A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A,\ \forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$$

d) orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are un opus notat $-A$ pentru care $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}$ (luăm $-A = \left(-a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$).

Observație. Definim operația de scădere a matricelor din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel:

$$A - B = A + (-B).$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Efectuați (atunci când este posibil) suma unor matrice dintre matricele:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ -2 & -4 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 4 & -2\end{pmatrix}.$$

Soluție. Deoarece $A, B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $C, D \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, se poate efectua numai $A + B$ și $C + D$. Avem:

$$A+B=\begin{pmatrix}2+5 & 1+6 & 4+7\\ -3-2 & 0-4 & -1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 7 & 11\\ -5 & -4 & 2\end{pmatrix},\ C+D=\begin{pmatrix}2+3 & 4-5\\ 1+4 & 6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Determinați matricea X știind că $A - B + X = C$, unde:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -2 & 3 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -6 & -2 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Soluție. $X = C - (A - B) = C + (-A) + B$;

$$X=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -1 & -3\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ -6 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -6\\ -1 & -5 & 9\end{pmatrix}.$$

Observație. Determinarea matricei X pentru care $A - B + X = C$ înseamnă de fapt rezolvarea unei ecuații matriceale.

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Demonstrați că $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Soluție. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$. Atunci $A + B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $(A + B)^t =$ $= (a_{ji}+b_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$, $(A)^t = (a_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$, $(B)^t = (b_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$, $A^t + B^t = (a_{ji}+b_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$ și deci $(A + B)^t = A^t + B^t$.

4. Determinați matricea $A=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}2k-1 & k^2 & i^k\\ k^2-k & 2 & -3k\end{pmatrix}$.

Soluție. Avem $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$, $\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n((n+1)}{2}=$ $=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n}2=2n$, $\sum_{k=1}^{n}(-3k)=-\frac{3n(n+1)}{2}$. Fie $A =$ $= (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$. Avem $a_{11}=n^2$, $a_{12}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $a_{21}=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$, $a_{22}=2n$, $a_{23}=$ $=-\frac{3n(n+1)}{2}$. Mai trebuie determinat elementul $a_{13}=\sum_{k=1}^{n}i^k=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+$ $+\ i^2+i^3+i^4)+\ldots+i^n$. Avem $i+i^2+i^3+i^4=0$. Rezultă $a_{13}=\begin{cases}0,\ n=4k,\ k\in\mathbb{N}^*\\ i,\ n=4k+1,\ k\in\mathbb{N}\\ i-1,\ n=4k+2,\ k\in\mathbb{N}\\ -1,\ n=4k+3,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Efectuați în câte două moduri: $A + B + C$, $D + E + F$.

b) Efectuați $A - B + C$, $A - B - C$, $-D + E - F$, $-D - E - F$.

c) Rezolvați ecuațiile matriceale:

i) $X + A + B = C$; ii) $X - A - B = -C$; iii) $X + D - E = F$; iv) $X + D + E = -F$.

2. Determinați x, y, z, t știind că $\begin{pmatrix} 2x+y & 2z & t \\ 2t & y^2 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z-t & 3t & x \\ x & 2y & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați:

a) $A^t + B$; b) $A + B^t$; c) $(-A)^t + (-B)$; d) $-A + (-B)^t$.

4. Fie $A = \begin{pmatrix} i^n & i^{n+1} & i^{n+2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i^n \\ i^{n+2} \\ i^{n+3} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați:

a) $A^t + B$; b) $A + B^t$; c) $\sum_{i=1}^{n} (A^t + B)$; d) $\sum_{i=1}^{n} (A + B^t)$.

5. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demonstrați că $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tf}(b)$.

6. Rezolvați următoarele ecuații matriceale:

a) $A + A^t = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$; b) $A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. a) Demonstrați că orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se scrie sub forma $A = B + C$, unde $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, B fiind matrice simetrică, iar C matrice antisimetrică.

b) Demonstrați că B și C sunt unice.

8. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați matricele:

a) $A = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & k & k^2 \\ k^3 - k^2 & 3k^2 - k & k^3 \end{pmatrix}$; b) $A = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \\ \varepsilon^{3k} & \varepsilon^{2k} + \varepsilon^k \end{pmatrix}$;

c) $A = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha^k & \alpha^{2k} \\ \alpha^{3k} & \alpha^{2k} - \alpha^k \end{pmatrix}$, știind că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$.

9. Fie $G_1, G_2, G_3 \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mulțimile matricelor simetrice, antisimetrice, respectiv diagonale. Demonstrați că adunarea matricelor definită pe fiecare mulțime are proprietățile de comutativitate, asociativitate, existența elementului neutru şi a elementului opus.

10. Fie $G_1, G_2, G_3 \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mulțimile matricelor simetrice, antisimetrice, respectiv diagonale. Demonstrați că adunarea matricelor definită pe fiecare mulțime are proprietățile de comutativitate, asociativitate, existența elementului neutru şi a elementului opus.

11. Studiați proprietățile date la problema 10 pentru mulțimile de matrice:

a) $G_4 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \right\}$; b) $G_5 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \right\}$.

11. Determinați matricele A, B pentru care:

a) $\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$; b) $\begin{cases} A + B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$.

12. Determinați matricele A, B, C pentru care:

a) $\begin{cases} A + B + C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ A + B - C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ A - B - C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$; b) $\begin{cases} A + B + C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ A + B - C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ A - B - C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$.

13. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât suma pătratelor tuturor elementelor sale este cel mult egală cu 4.

a) Determinați numărul tuturor matricelor A ce îndeplinesc condiția din ipoteză.

b) Determinați suma tuturor matricelor A ce îndeplinesc condiția din ipoteză.

14. Determinați matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, știind că $A + A^t = B$ și $A - A^t = B^t$.

15. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, unde $a_{ij} \in \mathbb{Z}^*$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, $\forall\ j = \overline{1,n}$. Determinați numărul matricelor A pentru care:

a) suma pătratelor elementelor sale este cel mult egală cu 10;

b) suma puterilor a patra a elementelor sale este cel mult egală cu 100.

16. Fie mulțimile de matrice $X = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A = A^t\}$, $Y = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A = -A^t\}$. Demonstrați că:

a) $A, B \in X \Rightarrow A + B \in X$; b) $A, B \in Y \Rightarrow A + B \in Y$;

c) pentru orice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ există $A \in X$, $B \in Y$ astfel încât $C = A + B$.

17. Determinați numărul elementelor mulțimii $M = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A = (a_{ij}), |a_{ii}| = 2, i = \overline{1,3}, |a_{ij}| = 1, i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}\}$.

2.3. Înmulțirea matricelor cu scalari

Definiție. Fie o matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și fie $\alpha \in \mathbb{C}$. Produsul dintre matricea A și scalarul α este matricea $\alpha A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, unde $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, $\forall\ j = \overline{1,n}$.

Teoremă. Înmulțirea matricelor cu scalari are proprietățile:

a) $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = O_{m,n}$, $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

c) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall\ A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

d) $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha \cdot \beta)A$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall\ A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

b) Fie $(\alpha + \beta)A = (c_{ij})$, $\alpha A + \beta A = (d_{ij})$. Avem $c_{ij} = (\alpha + \beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij} = d_{ij}$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, $\forall\ j = \overline{1,n}$ și deci $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

c) Fie $\alpha(A + B) = (c_{ij})$, $\alpha A + \alpha B = (d_{ij})$. Avem $c_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = d_{ij}$, $\forall\ i = \overline{1,m}$, $\forall\ j = \overline{1,n}$, și deci $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Definiție. Fie matricele $A_1, A_2, \ldots, A_p \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}^*$. Se numește *combinație liniară* a matricelor $A_1, A_2, \ldots, A_p$ orice matrice de forma $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k A_k$, unde $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $\forall\ k = \overline{1,p}$. Matricele $A_1, A_2, \ldots, A_p$ se numesc *liniar dependente* dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{C}$, cel puțin unul nenul, astfel încât $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k A_k = O_{m,n}$. Matricele $A_1, A_2, \ldots, A_p$

CUPRINS