Petre Năchilă

Ora de matematică

Clasa a X-a

Editura NOMINATRIX
2019

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programele şcolare în vigoare.

Referent ştiinţific: Ana Cârstoveanu

Editor: Ovidiu Bărbulescu

Comenzi: **Marius Dorbin (**0722. 319. 653)

http://www.librarianominatrix.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NĂCHILĂ, PETRE
Ora de matematică : clasa a X-a / Petre Năchilă. - Bascov : Nominatrix, 2019
ISBN 978-606-8873-03-9

51

Capitolul 1
MULȚIMEA NUMERELOR REALE. MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimea numerelor reale (completări)

O fracție zecimală infinită şi neperiodică se numeşte *număr irațional*. Prin *număr real* înțelegem orice fracție zecimală infinită, periodică sau neperiodică.

Exemple de numere iraționale: $\sqrt{p}$, p număr prim, π, e.

Proprietăţi ale numerelor raţionale:

a) $x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y; x - y, xy \in \mathbb{Q}$; b) $x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$; c) dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, p, q sunt numere prime, atunci $a\sqrt{p} + b\sqrt{q} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Arătați că pentru $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, p număr prim:

a) $a + b\sqrt{p} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$; b) $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p} \Leftrightarrow a = c$ şi $b = d$.

Soluție. a) Presupunem $b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{p} = -\dfrac{a}{b}$, unde $\sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $-\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 0$; b) $(a - c) + (b - d)\sqrt{p} = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} a - c = 0$ şi $b - d = 0 \Rightarrow a = c$ şi $b = d$.

PROBLEME PROPUSE

1. Stabiliți care din următoarele numere sunt numere raționale:

a) $\sqrt{169}$; b) $\sqrt{\dfrac{144}{289}}$; c) $\sqrt{1,0201}$;

d) $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$; e) $\sqrt{1 + 3 + 5 + ... + 27}$; f) $\sqrt{2 + 4 + 6 + ... + 2000}$.

2. Dați exemplu de câte două numere raționale cuprinse între:

a) $\sqrt{5}$ și $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{17}$ și $\sqrt{19}$.

3. Demonstrați că există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

a) $\left(3+2\sqrt{5}\right)^2 = m + n\sqrt{5}$; b) $\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{3}\right)^2 = m + n\sqrt{6}$;

c) $\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}\right)^2 = m + n\sqrt{5}$; d) $\left(\dfrac{12}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^2 = m - n\sqrt{6}$.

4. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:

a) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; b) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow a - b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

c) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; d) $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

e) $(x + y) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Q}$; f) $xy \in \mathbb{Q} \Rightarrow x, y \in \mathbb{Q}$.

5. Fie $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 21;\ \sqrt{5n+a} \notin \mathbb{Q}\}$. Demonstrați că avem card $A \geq 8$.

6. Determinați mulțimile:

a) $A \in \{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n^2-n+1} \in \mathbb{Z}\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{n^2-5n+7} \in \mathbb{Z}\}$.

7. Justificați care din afirmațiile următoare sunt adevărate:

a) pentru orice numere întregi a, b impare, $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbb{Q}$;

b) pentru orice numere întregi pare a și b, avem $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbb{Q}$;

c) există a, b numere întregi impare cu $\sqrt{a^3+b^3} \in \mathbb{Q}$.

8. Determinați $x, y \in \mathbb{Q}$ astfel încât:

a) $\dfrac{x\sqrt{3}+y}{2-\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$; b) $\dfrac{x\sqrt{2}+y}{3-\sqrt{2}} = 1 + y$.

9. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați că:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; b) $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$;

c) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$; d) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$;

e) $(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c) \leq abc$; f) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$;

g) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$; h) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$.

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea: $A = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{n}\right\}$. Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că avem card$\left(A \cap \left(\mathbb{R} - \mathbb{Q}\right)\right) = 85$.

11. Fie $a, b, c > 0$ iar $a + b + c = 3$. Fie $A = \sqrt{9a+2} + \sqrt{9b+3} + \sqrt{9c+4}$. Demonstrați că $A < \frac{39}{2}$.

12. Demonstrați că nu există $a, b \in \mathbb{R}$ şi $m, n, p \in \mathbb{N}$ astfel încât $a + mb = \sqrt{2}$, $a + nb = \sqrt{5}$, $a + pb = \sqrt{11}$.

13. Demonstrați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, x > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$ (proprietatea lui Arhimede).

14. Fie $r \in \mathbb{Q}_+^*$ o aproximare a lui $\sqrt{2}$. Demonstrați că numărul $\frac{r+2}{r+1}$ este o aproximare „mai bună" pentru $\sqrt{2}\left(\text{adică avem } \left|\frac{r+2}{r+1} - \sqrt{2}\right| \le \left|r - \sqrt{2}\right|\right)$

15. Construiți numai cu rigla şi compasul imaginile geometrice ale numerelor:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \sqrt{13} .$$

16. Determinați părțile întregi ale numerelor:

a) $a_n = \sqrt{n^2 + n}$; b) $b_n = \sqrt{n^2 + 6n}$; c) $c_n = \sqrt{n^2 + 7n}$.

17. Demonstrați că între orice două numere reale distincte există o infinitate de numere raționale şi o infinitate de numere iraționale.

1.2. Radicali de ordinul 2. Radicali de ordinul 3

Teorema 1. Pentru orice număr real $a \ge 0$ există un număr real unic $x \ge 0$ astfel încât $x^2 = a$ (numărul real x notat cu $\sqrt{a}$ se numeşte rădăcina pătrată a numărului a).

Teorema 2. Pentru orice număr real a există un număr real unic x astfel încât $x^3 = a$ (Numărul real x notat cu $\sqrt[3]{a}$ se numeşte rădăcina cubică a numărului a, sau radicalul de ordinul 3 din a).

• **Proprietățile radicalului de ordinul 2:**

Fie $a \ge 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem:

a) $\sqrt{a^2} = a\left(\text{pentru } a \in \mathbb{R} \text{ avem } \sqrt{a^2} = |a|\right)$; b) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; c) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

d) $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$; e) $\sqrt{a^{2n}} = a^n$; f) $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Observație. Dacă $a < 0$, $b < 0$ avem: $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

• **Proprietăţile radicalului de ordinul 3:**

Fie a, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem:

a) $a < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < 0$; b) $a > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} > 0$; c) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$;

d) $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$; e) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$; f) $\sqrt[3]{a^n} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^n$;

g) $\sqrt[3]{a^{3n}} = a^n$; h) $a < b \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

• **Formula radicalilor dubli** (compuşi, suprapuşi)

Fie $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b$. Avem: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

• Pentru raționalizarea numitorilor se folosesc formulele:

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$, $a > 0$; 2) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a - b$, $a, b > 0$;

3) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$; 4) $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b$;

5) $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a + b$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}} = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}}$.

Soluție. Se impun condițiile $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \geq 0$ și $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) = D$.

Ridicând relația la pătrat avem $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 = (x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow 10x^2 = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \notin D \Rightarrow S = \varnothing$.

2. Arătați că $a = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}} \in \mathbb{N}$.

Soluție. Folosind formula radicalilor dubli obținem: $\sqrt{13 + \sqrt{48}} = \sqrt{\dfrac{13 + \sqrt{169 - 48}}{2}} +$

$+ \sqrt{\dfrac{13 - \sqrt{169 - 48}}{2}} = \sqrt{\dfrac{13 + 11}{2}} + \sqrt{\dfrac{13 - 11}{2}} = \sqrt{12} + 1 = 2\sqrt{3} + 1$;

$a = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{5 - 2\sqrt{3} - 1}}$. Analog $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$.

Deci $a = \sqrt{2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{N}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Demonstrați că pentru orice a, $b \in (0, \infty)$, $a < b$, avem:

$$a \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le b .$$

2. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt{2-|x|}$; b) $\sqrt{4-|2x-2|}$; c) $\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$;

d) $\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt{x^2-1}$; e) $\sqrt[3]{(x^2-1)(x+2)}$ f) $\sqrt{(x^2-1)(4-x)(x-2)}$.

3. Determinați $x \in \mathbb{R}$ ştiind că:

a) $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$; b) $\sqrt{4x^2-4x+1}=1-2x$; c) $\sqrt{-x^2}=x$;

d) $\sqrt[3]{(x-1)^3}=x-1$; e) $\sqrt[3]{(x-1)^3}=1-x$; f) $\sqrt{(x-2)^2}=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$.

4. Efectuați:

a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

c) $\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}$;

d) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

5. Determinați a, b, $c \in \mathbb{Q}$ ştiind că:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}+2}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$; b) $\sqrt{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{3}$.

6. Raționalizați:

a) $\dfrac{2}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$; c) $\dfrac{\sqrt{15}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$;

d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; e) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}$;

g) $\dfrac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{30}}}+\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$; h) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; i) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$;

j) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$; k) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; l) $\dfrac{6}{3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3}$.

7. Comparați numerele a și b în cazurile:

a) $a = \sqrt{11}+\sqrt{13}$; $b = \sqrt{10}+\sqrt{14}$; b) $a = \sqrt{17}-\sqrt{13}$, $b = \sqrt{15}-\sqrt{11}$.

8. Demonstrați că:

a) $\sqrt{8+\sqrt{8}+\sqrt{20}+\sqrt{40}} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$; b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} > 1{,}41(4).$

9. Fie $x \in [-4; 0]$, $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - 4y + 4 = 0$. Determinați:

$$a = \sqrt{x^2+9y^2+8x+16}+\sqrt{x^2+9y^2-18y+9} .$$

10. Calculați numerele:

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2k+1+2\sqrt{k^2+k}}}$;

b) $\sqrt{\sqrt{1}+\sqrt{1+3+5}+\sqrt{1+3+5+7+9+\sqrt{\sqrt{1+3+5+...+2013}}}}$.

11. a) Demonstrați că $\sqrt{1+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

b) Calculați $\sum\limits_{k=1}^{99} \sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}}$.

12. Demonstrați că dacă $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ sau $\sqrt{a}-\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, unde $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$.

13. Demonstrați că $E(n) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde $E(n) = \dfrac{2n+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$.

14. Stabiliți dacă există $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(m) \in \mathbb{Z}$, unde:

$$m = \frac{11+a}{11-a},\ E(m) = \frac{\sqrt{m}+\sqrt{\dfrac{1}{m}}}{\sqrt{m}-\sqrt{\dfrac{1}{m}}} .$$

15. Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale x, y cu proprietatea că $x + y = xy \in \mathbb{N}$.

16. Determinați următoarele numere:

a) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$; b) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$;

c) $\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}-\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$.

17. Fie a, b, $c > 0$. Demonstrați că $\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

18. Calculați sumele:

a) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$; b) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$;

c) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{(k+1)^2}}$.

19. Demonstrați că $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^n+\left(\sqrt{2}+1\right)^n+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^n+\left(\sqrt{2}-1\right)^n \ge 4$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

20. Demonstrați că $x > \sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)}$ pentru orice $x \ge 1$.

21. Fie x, y, $a \in [-1, \infty)$ astfel încât $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+a}$. Demonstrați că:

$$x + y \ge 2a.$$

1.3. Radicali de ordinul *n*

Definiția 1. Fie $a \ge 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ număr par. Se numește radical de ordinul n din a numărul real $x \ge 0$ unic cu proprietatea $x^n = a$. Notăm $x = \sqrt[n]{a}$ şi avem $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Definiţia 2. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$ număr impar. Se numeşte radical de ordinul n din a numărul real x unic cu proprietatea $x^n = a$. Notăm $x = \sqrt[n]{a}$ şi avem $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Proprietățile radicalilor

De ordin par $n \ge 2$	**De ordin impar $n \ge 3$**
1) $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$, $\forall\, x \ge 0, y \ge 0$.	1) $x^n = y^n \Leftrightarrow x = y$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$
2) $\sqrt[n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\ a \ge 0, b \ge 0 \\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt[n]{\lvert b\rvert};\ a\cdot b \ge 0 \end{cases}$	2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$
3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ a \ge 0, b > 0 \\ \dfrac{\sqrt[n]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[n]{\lvert b\rvert}};\ a\cdot b \ge 0,\ b \ne 0 \end{cases}$	3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$
4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; $a \ge 0$, $m \in \mathbb{N}^*$	4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$

5) $\sqrt[mn]{a^m}=\begin{cases}\sqrt[n]{a},\ a\ge 0, m\in\mathbb{N}^*\\ \sqrt[n]{\lvert a\rvert},\ a<0,\ m-par\end{cases}$	5) $\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a},\ a\in\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}^*$
6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $a\ge 0,\ m\in\mathbb{N},\ m\ge 2$	6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}, a\in\mathbb{R},\ m-$ impar ≥ 3
7) $a\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{a^n b}, a\ge 0, b\ge 0\\ -\sqrt[n]{a^n b},\ a<0,\ b\ge 0\end{cases}$	7) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$
8) $\sqrt[n]{a^n b}=\begin{cases}a\sqrt[n]{b}, a\ge 0, b\ge 0\\ -a\sqrt[n]{b},\ a<0,\ b\ge 0\end{cases}$	8) $\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}$, $a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}$
9) $a>0,\ b>0\Rightarrow\left[\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a<b\right]$	9) $a,\ b\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a<b\right)$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Ordonați crescător numerele $\sqrt[4]{3},\ \sqrt{2},\ \sqrt[5]{4}$.

Soluție. $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\cdot 5]{3^5}=\sqrt[20]{243};\ \sqrt{2}=\sqrt[2\cdot 10]{2^{10}}=\sqrt[20]{1024};\ \sqrt[5]{4}=\sqrt[5\cdot 4]{4^4}=\sqrt[20]{256}$.

Cum $\sqrt[20]{243}<\sqrt[20]{256}<\sqrt[20]{1024}\Rightarrow\sqrt[4]{3}<\sqrt[5]{4}<\sqrt{2}$.

2. Efectuați $\sqrt{2\sqrt[5]{2}}\cdot\sqrt[10]{4\sqrt[4]{2^5\cdot 8}}$.

Soluție. $\sqrt{2\sqrt[5]{2}}\cdot\sqrt[10]{4\sqrt[4]{2^5\cdot 8}}=\sqrt[10]{2^6}\cdot\sqrt[10]{4\cdot\sqrt[4]{2^8}}=\sqrt[10]{2^6}\cdot\sqrt[10]{4\cdot 2^2}=\sqrt[10]{2^6\cdot 2^2\cdot 2^2}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculați:

a) $\sqrt[3]{6^6}$; b) $\sqrt[4]{(-2)^8}$; c) $\sqrt[6]{(-8)^2}$; d) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{27}}$;

e) $\sqrt[n]{(-1)^n}$; f) $\sqrt[5]{0{,}00001}$; g) $\sqrt[3]{-0{,}000027}$; h) $\sqrt[4]{(-0{,}0025)^2}$.

2. Determinați valorile lui x pentru care au loc egalitățile:

a) $\sqrt[6]{x^6}=x$; b) $\sqrt[6]{x^6}=-x$; c) $\sqrt[3]{x^6}=x$; d) $\sqrt[3]{x^6}=-x$;

e) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^4}=\dfrac{x-1}{\lvert x\rvert}$; f) $\sqrt[5]{\dfrac{x^2-1}{\lvert x-1\rvert}}=1+x$; g) $\sqrt[9]{512^{-1}}=2x^2$.

3. Determinați valorile reale ale lui x pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt[3]{-x^2+3x-2}$; b) $\sqrt[4]{4x^2-5x+1}$; c) $\sqrt[6]{x^3-3x^2+3x-1}$;

d) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{2(x+1)}}$; e) $\sqrt[6]{\dfrac{3x+3}{x^2-1}}$; f) $\sqrt[4]{x^2-x}-\sqrt[6]{x-x^2}$.

4. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sqrt[4]{(m-1)x^2-2mx+m-1}$; b) $f(x) = \sqrt[4]{(m+1)x^2+2x+m-1}$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-x}{mx^2-(m-1)x+2m-1}}$; d) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{mx^2-x}{mx^2-(m+1)x+m}}$.

5. Introduceți factorii sub radical:

a) $2\sqrt[3]{2}$; b) $-\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{81}$; c) $-\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{\dfrac{81}{256}}$; d) $-a\sqrt[5]{a^3}$; e) $a\sqrt[6]{a^{-3}}$.

6. Scoateți factorii de sub radical:

a) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; b) $\sqrt[4]{(-5)^8}$; c) $\sqrt[4]{(-2)^7\cdot(-3)^9}$; d) $\sqrt[7]{3^{13}\cdot\sqrt[3]{243}}$;

e) $\sqrt{4a^5x^4}$; f) $\sqrt[4]{a^{20}y^9}$; g) $\sqrt[6]{a^{12}b^{18}c^3}$.

7. Ordonează crescător numerele:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$; b) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[7]{7}$.

8. Calculați sumele:

a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k^2+k}+\sqrt[3]{(k+1)^2}}$;

b) $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[4]{(k-1)^3}+\sqrt[4]{(k-1)^2k}+\sqrt[4]{(k-1)k^2}+\sqrt[4]{k^3}}$.

c) Determinați: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \in N\}$; $B = n \in N^* \left| S'_n \in \mathbb{N} \right\}$

9. Demonstrați că pentru orice $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ avem:

a) $\left(\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b}\right)\left(\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}\right) = a-b$;

b) $\left(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}\right)\left(\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}-\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}\right) = a+b$;

c) $\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a-b$;

d) $\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}b}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a+b$, n impar.

10. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru orice $a_1, a_2, a_n > 0$. Avem:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

11. Demonstrați că $x_0 = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}$ este o soluție a ecuației: $x^3 - 3\,ax - a^2 - a = 0$.

12. Determinați o ecuație de gradul al treilea cu coeficienți întregi care are una din soluții $x_a = \sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}$, $a \in \mathbb{R}$.

13. În condițiile indicate alăturat, să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$;

b) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{a-\sqrt{ab}}-\frac{a}{\sqrt{ab}+b}\right)$; $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$;

c) $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{bc}+\sqrt[4]{4ab^2c}\right)\cdot\left(\sqrt{ab}+c\sqrt{\frac{b}{c}}-\sqrt[4]{4ab^2c}\right), a,b,c \in (0,\infty)$

d) $\left[\sqrt{b}-\left(\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{a}{\sqrt{ac}}\right):\frac{\sqrt{a}}{c}\right]\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{c^2}}$, $a, b, c > 0$;

e) $\left(\frac{2-x\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\frac{2+x\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right):\frac{4+x}{4x-1}$, $x > 0$, $x \neq \frac{1}{4}$!

f) $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}\right):\frac{2x\sqrt{x+y}}{y^2\sqrt{x-y}}$, $x > y > 0$.

14. Pentru $x \geq 0$, determinați $f(x) = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x}+3\left(x+\sqrt{x}\right)}-\sqrt[3]{x\sqrt{x}-1-3\left(x-\sqrt{x}\right)}$.

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $\left(\frac{x\sqrt[3]{x}-2x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}}+\frac{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\right):\sqrt[3]{x}$; $x, y \in R_+^*$; $x \neq y$;

b) $\left[\left(\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}-\frac{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}{\left(\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}\right)^2}\right)\right]:\left[\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)\left(\sqrt[3]{y}+\sqrt[6]{xy}-2\sqrt[3]{x}\right)\right]-2\sqrt[6]{x}$, $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$;

c) $\dfrac{\sqrt[n]{\dfrac{x+2}{x+1}}+\sqrt[n]{\dfrac{x-2}{x-1}}}{\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x+2}}+\sqrt[n]{\dfrac{x-1}{x-2}}}+\dfrac{\sqrt[n]{\dfrac{x+2}{x+1}}-\sqrt[n]{\dfrac{x-2}{x-1}}}{\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x+2}}-\sqrt[n]{\dfrac{x-1}{x-2}}}$, $x > 2$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

16. Calculați $f(x_0)$ în cazurile:

a) $f(x) = \dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$, $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

b) $f(x) = \dfrac{2b\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $a\cdot b > 0$;

c) $\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-ax}}\cdot\dfrac{1-ax}{1+ax}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2a}{b}-1}$, $2a \geq b$;

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = \sqrt{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}$, $a \cdot b > 0$.

17. Determinați prima zecimală a numărului $a = \sqrt{n^2+n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

18. Demonstrați că:

a) $\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{8} < \sqrt[4]{6}+\sqrt[4]{7}$;   b) $\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{7} > \sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{5}$, $n \geq 2$.

19. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Comparați numerele:

$$x=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)$$

$$y=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}\right).$$

20. Demonstrați că $a, b \notin \mathbb{Z}$, unde: $a = \dfrac{1+3\sqrt{3}+5\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; $b = \dfrac{3\sqrt{3}+5\sqrt{5}+7\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

21. Determinați $f(a) = a^2 + \sqrt{a^4+a+1}$, unde $a = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{8}+\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

22. Calculați $f(x) = x^3 + bx + a$ pentru $x = \sqrt[3]{-\dfrac{a}{2}+\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\dfrac{a}{2}-\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^3}{27}}}$.

23. Calculați ecuațiile:

a) $\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}} = \sqrt[5x]{2x}$;   b) $\sqrt[2x+2]{x^3\sqrt[x]{x^3}} = \sqrt[2x]{x^3}$;   c) $\sqrt[2x+1]{\sqrt[11-4x]{(-2x)^{3x}}} = \sqrt[3x-1]{7x+2}$.

24. Fie $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $a = 1 + 2m - n^2$, $b = 1 + 2n - p^2$, $c = 1 + 2p - m^2$. Determinați:

$$A = \sqrt[a]{m}+\sqrt[b]{n}+\sqrt[c]{p}.$$

25. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$, $b_n = \sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}$, $c_n = \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}+...+\sqrt[3]{6}}$. Determinați $[a_n]$, $[b_n]$, $[c_n]$, $[b_n + c_n]$.

26. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+...+\sqrt{n}}}}$. Studiați monotonia și mărginirea șirului (a_n).

27. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2}+...+\sqrt{2}}$, n radicali. Demonstrați că:

$$\frac{a_n}{6+a_{n-1}} < \frac{1}{4} < \frac{2-a_{n+1}}{2-a_n}, \ \forall\, n \geq 2$$

1.4. Puteri cu exponent rațional

Definiție: Fie numărul real $a \geq 0$ şi fie $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Prin definiție avem:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

Observație: Este absolut necesar ca $a \geq 0$. În unele cazuri, pentru a < 0, definiția nu ar mai avea sens $\left(\text{exemplu}\,(-4)^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{(-4)^3}\right)$.

Definiție: Fie $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Prin definiție $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Teoremă: (Proprietățile puterilor cu exponent rațional). Fie $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ şi fie $r, s \in \mathbb{Q}$. Avem:

1. $a^r \cdot a^s = a^{s+r}$; **2.** $a^r : a^s = a^{r-s}$; **3.** $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$;

4. $a^0 = 1$; **5.** $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$; **6.** $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$.

7. Dacă $a > 1$ avem $a^r < a^s \Leftrightarrow r < s$; **8.** Dacă $a \in (0, 1)$ avem $a^r < a^s \Leftrightarrow r > s$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $a \in (1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Aflați n pentru care $x < \sqrt[1025]{a}$, unde:

$$x = \sqrt[4^n-1]{\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot...\cdot\sqrt[2^n]{a}\right)^{2^n}} .$$

Soluție. $x = \left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}\cdot...\cdot a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{2^n}{4^n-1}} \Leftrightarrow x = \left(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{2^n}{4^n-1}} \Leftrightarrow x = a^{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{2^n}{4^n-1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = a^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\cdot\frac{2^n}{4^n-1}} \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{2^n+1}} \Rightarrow a^{\frac{1}{2^n+1}} < a^{\frac{1}{1025}}$; cum $a > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2^n+1} < \dfrac{1}{1025} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n + 1 > 1025 \Rightarrow 2^n > 1024 \Rightarrow 2^n > 2^{10} \Rightarrow n > 10.$

PROBLEME PROPUSE

Efectuați:

1. $\dfrac{18^{-6}\cdot 3^{16}}{2^{-5}}$. **2.** $1{,}9^{-3} : 5{,}7^{-3} \cdot 6^{-2}$. **3.** $8^{-\frac{2}{3}} + 16^{-\frac{3}{4}}$. **4.** $(0{,}04)^{-1{,}5} \cdot (0{,}125)^{-\frac{5}{3}}$.

5. $\left(a^{\frac{1}{8}} - b^{\frac{1}{8}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{8}} + b^{\frac{1}{8}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$, $a > 0$, $b > 0$. **6.** $256^{-\frac{3}{4}}\cdot 64^{-\frac{3}{2}}\cdot(0{,}25)^{-8}$.

7. $(0{,}0016)^{\frac{3}{2}} : (0{,}008)^{-\frac{2}{5}}$.

8. Comparați numerele:

a) $4^{\frac{5}{6}}$ și $4^{\frac{7}{8}}$; b) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{6}$ și $(0{,}4)^{\frac{13}{2}}$; c) $(0{,}04)^{-\frac{3}{2}}$ și $\left(\dfrac{25}{2}\right)^{1{,}5}$;

d) $\left(2\sqrt{3}\right)^{-8}$ și $\left(\dfrac{1}{\sqrt{12}}\right)^{-7}$; e) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{8}\right)^{3{,}4}}$ și $\sqrt[6]{0{,}125^{-3}}$.

9. Precizați în ce condiții au sens expresiile următoare și să se aducă la forma cea mai simplă:

a) $x\sqrt{x} + 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} + y\sqrt{y}$; b) $\left[a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + b\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - b\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$;

c) $\left[a\cdot\left(\dfrac{bc}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + b\cdot\left(\dfrac{ca}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + c\cdot\left(\dfrac{ab}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\sqrt{abc}$;

d) $\left(a + b + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b}\right)$;

e) $\dfrac{a-b}{a^{0{,}5} - b^{0{,}5}} - \dfrac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$; f) $\dfrac{a-b}{a^{0,(3)} + b^{0,(3)}} - \dfrac{\sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{b^3}}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$;

g) $\dfrac{1 - a^{-\frac{1}{2}}}{1 + a^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{a^{0{,}5} + a^{-0{,}5}}{a-1}$; h) $\left(1 + \dfrac{x^{-n} + y^{-n}}{x^{-n} - y^{-n}}\right)^{-2}, n \in \mathbb{N}^*$.

10. Fie $a > 0, b > 0$. Demonstrați că: $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > (a+b)^{\frac{2}{3}}$.

11. Determinați în ce condiții sunt definite expresiile următoare şi aduceți-le la forma cea mai simplă:

a) $\dfrac{x^{\frac{4}{3}}-8y\sqrt[3]{x}}{x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}\right)-\sqrt[3]{x^2}$;

b) $\left[\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{4}}}{2(1+x)^{\frac{3}{4}}}+\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{4}}\cdot(1-x)^{-\frac{3}{4}}}{2}\right]\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}$;

c) $\left[\dfrac{\sqrt[4]{xy}-\sqrt{xy}}{1-\sqrt{xy}}+\dfrac{1-(xy)^{\frac{1}{4}}}{(xy)^{\frac{1}{4}}}\right]:\dfrac{\sqrt[4]{xy}}{1+(xy)^{\frac{3}{4}}}-\dfrac{1-\sqrt[4]{xy}-\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}$;

d) $\left(x+\dfrac{y^{1,5}}{x^{0,5}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\dfrac{x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

e) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}\right)\cdot\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}\right)^{-1}+\sqrt[6]{x}$;

f) $\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1+\sqrt[6]{x}}-\dfrac{2\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}\right)^{-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{4}$;

g) $\left[\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}\right]\cdot\dfrac{2\sqrt{2,5}(a+b)^{-1}}{\sqrt{10}}$;

h) $\left\{1-\left[x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2\right\}^{-1}\cdot\left(1+x^2\right)^{-1}\cdot\left[\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-x^2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$;

i) $\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\left(1+\sqrt[8]{x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\sqrt[2^n]{x}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

12. Aflați $f(x_0)$ în următoarele cazuri:

a) $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3+x^2+3x+5}{x^5+x^2-x+2}$, $x_0^3+x_0+1=0$;

b) $f(x)=\left[\left(x+a\right)^{\frac{1}{3}}\left(x-a\right)^{-\frac{1}{3}}+\left(x+a\right)^{-\frac{1}{3}}\left(x-a\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}$; $x_0=a\cdot\dfrac{m^3+n^3}{m^3-n^3}$, $0<n<m$, $a>0$.

13. Determinați $f(x_0, y_0)$ în cazurile următoare:

a) $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{x^{0,5} - y^{0,5}}{x^{0,5} + y^{0,5}}$; $x_0 = \dfrac{1}{16}$, $y_0 = \dfrac{1}{81}$;

b) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x-2} + \sqrt{y+1}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{y+1}}$, $x_0 = \dfrac{3a^2 - 2a + 9}{a^2 + 4}$, $y_0 = \dfrac{-4a}{a^2 + 4}$, $a \in \mathbb{R}$.

1.5. Puteri cu exponent real

Definiția 1. Fie numerele reale x şi a şi fie $\alpha > 0$. Spunem că a-l aproxima pe x prin lipsă cu eroarea α dacă $a \le x \le a + \alpha$. Spunem că a aproximează pe x cu eroarea α dacă $|x - a| < \alpha$.

Definiția 2. Pentru numărul real pozitiv $x = x_0{,}x_1x_2\ldots x_n\ldots$ aproximările zecimale cu eroare mai mică decât 10^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, sunt:

a) prin lipsă: $x_n' = x_0{,}x_1x_2\ldots x_n$,

b) prin adaos: $x_n'' = x_0{,}x_1x_2\ldots x_n + 10^{-n}$

Observații: 1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $x_n' \in \mathbb{Q}$, $x_n'' \in \mathbb{Q}$, $x_n' \le x < x_n''$.

2. Dacă $x > 0$, atunci $-x < 0$ şi aproximările lui $-x$ sunt: $-x_n''$ prin lipsă şi $-x_n'$ prin adaos. Avem $-x_n'' < -x \le -x_n'$.

Definiția 3. Fie $a > 0$, $a \ne 1$ şi fie $x > 0$. Puterea x a numărului real a este numărul y notat a^x cu proprietățile:

a) $a^{x_n'} \le a^x < a^{x_n''}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, dacă $a > 1$;

b) $a^{x_n''} < a^x \le a^{x_n'}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, dacă $a \in (0, 1)$. Dacă $a > 0$, $a \ne 1$, $x < 0$, luăm $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$.

Observații: 1. $1^x = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; **2.** $0^x = 0$, $\forall\, x > 0$.

Teoremă (proprietățile puterilor cu exponent real):

Pentru orice $a > 0$, orice $b > 0$, orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; b) $a^x : a^y = a^{x-y}$; c) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$;

d) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; f) $a^x > 0$.

g) dacă $a > 1$ avem $a^x > 1$ pentru orice $x > 0$;

h) dacă $a \in (0, 1)$ avem $a^x < 1$ pentru orice $x > 0$:

i) dacă $a > 1$ avem ($a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$);

j) dacă $a \in (0, 1)$ avem ($a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$);

k) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați pentru $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$ aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos cu 10^{-n} ale numerelor $a + b$ şi ab, $-\dfrac{a+b}{2}$; $n \le 3$.

2. Calculați: a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\sqrt{8}} \cdot 4^{-2\sqrt{2}}$; b) $\left(\left(\dfrac{1}{8}\right)^{3\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{2}}$; c) $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{-\sqrt{8}}$.

3. Comparați cu 1 următoarele numere:

a) $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{3}$; b) $\left(3\sqrt{3}\right)^{-2\sqrt{2}}$; c) $\left(2\cdot\sqrt[3]{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; d) $\left|4-3\sqrt{3}\right|^{-2}$; e) $\left|\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3}\right|^{0,5}$.

4. Comparați numerele:

a) $\left(3\sqrt{2}\right)^{x}$ cu $\left(2\sqrt{3}\right)^{x}$; b) $\left(5-2\sqrt{6}\right)^{x}$ cu $\left|\sqrt{24}-25\right|^{x}$; c) $\left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{x}$ cu $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{x}$.

5. Comparați numerele x şi y ştiind că:

a) $2{,}4^{x} < 2{,}(4)^{y}$; b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x} \le 0{,}33^{y}$; c) $\left(2\sqrt{2}+1\right)^{x} \le \left(\dfrac{7}{2\sqrt{2}-1}\right)^{y}$;

d) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{x} \ge \left(3+2\sqrt{2}\right)^{-y}$; e) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{5}\right|^{x} > \left(\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)^{-y}$.

6. Folosind un calculator, determinați cu două zecimale exacte următoarele numere:

a) $3^{\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$; c) $2^{\sqrt[3]{3}}$; d) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$; e) $3^{\sqrt[3]{3}}$.

7. Determinați valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care au loc expresiile:

a) $f(x) = \left(x-1\right)^{\sqrt{2-x}}$; b) $f(x) = \left(x^2-1\right)^{\sqrt{2x-x^2}}$; c) $f(x) = \left(x^2-3x+2\right)^{\sqrt{2-x^2}}$.

8. Fie numerele a, b, $c > 0$ în progresie geometrică. Fie $x \in \mathbb{Q}$. Demonstrați că numerele a^x, b^x, c^x sunt în progresie geometrică.

9. a) Fie $x > 0$, $a = \left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}$, $b = x^{\frac{1}{2}}+1$. Determinați o relație numai între a şi b.

b) Analog pentru $a = \left(\sqrt{x}+1\right)^{2}$; $b = \left(\sqrt{x}-1\right)^{2}$.

10. Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care avem:

a) $\left(x^2\right)^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{|x|}$; b) $\left(|x|^3\right)^{\frac{1}{6}} + \left(x^4\right)^{\frac{1}{8}} = 2\sqrt{x^2}$; c) $\frac{x}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{|x|}}$;

d) $x\sqrt{2\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{4\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}$; e) $a^x \geq b^x$, $a > 0$, $b > 0$; f) $x^{2-\sqrt{3}} \geq x^{3-\sqrt{2}}$.

1.6. Logaritmi

Definiţie: Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Se numeşte *logaritmul* numărului $x > 0$ în baza a exponentul $y \in \mathbb{R}$ la care se ridică baza a pentru a obține numărul x.

Notăm $y = \log_a x$, unde $a^y = x$.

Observaţii:

1. $a^{\log_a x} = x$;

2. Notații: logaritmul lui x în baza 10 se notează lg x; logaritmul natural (în baza e) se notează ln x;

3. $\log_a a = 1$;

4. $\log_a a^x = x$;

5. $\log_a 1 = 0$.

Teoremă. Logaritmii au proprietățile (pentru $a > 0$, $a \neq 1$):

1. $\log_a a^m = m$, $\forall\, m \in \mathbb{R}$;

2. $\log_a x^m = m\log_a x$, $x > 0$, $m \in \mathbb{R}$;

3. $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$, $\forall x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

4. $\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $xy > 0$;

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $xy > 0$;

6. $\log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$;

7. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$;

8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $b > 0$; $b \neq 1$;

9. $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_a b$, $b > 0$;

10. $\log_a \frac{1}{b} = \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$; $b > 0$;

11. $\log_{a^\alpha} x^\beta = \frac{\beta}{\alpha}\log_a x$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty) - \{1\}$. Calculați $E = \left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\log_d \frac{b}{c}} \cdot \left(\frac{b^2}{ac}\right)^{\log_d \frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\log_d \frac{a}{b}}$.

Soluție. Calculăm $\log_d E = \log_d \left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\log_d\left(\frac{b}{c}\right)} + \log_d \left(\frac{b^2}{ac}\right)^{\log_d\left(\frac{c}{a}\right)} + \log_d \left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\log_d\left(\frac{a}{b}\right)} =$

$= \log_d\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{a^2}{bc}\right) + \log_d\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b^2}{ac}\right) + \log_d\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c^2}{ab}\right) = (\log_d b - \log_d c)(2\log_d a - \log_d b -$ $- \log_d c) + (\log_d c - \log_d a)(2\log_d b - \log_d a - \log_d c) + (\log_d a - \log_d b)(2\log_d c - \log_d a -$ $- \log_d b$. După desființarea parantezelor și reducerea termenilor asemenea se obține $\log_d E = 0 \Rightarrow E = 1$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. Demonstrați că $a^2 + b^2 = 7ab \Rightarrow \ln\left|\frac{a+b}{3}\right| = \frac{1}{2}(\ln|a| + \ln|b|)$.

Soluție. $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $ab > 0$. Din $a^2 + b^2 = 7ab \Rightarrow (a + b)^2 - 2ab = 7ab \Rightarrow$ $\Rightarrow (a + b)^2 = 9ab \Rightarrow \ln(a + b)^2 = \ln(9ab) \Rightarrow 2\ln|a + b| = \ln 9 + \ln|a| + \ln|b| \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\ln|a + b| - 2\ln 3 = \ln|a| + \ln|b| \Rightarrow \ln\left|\frac{a+b}{3}\right| = \frac{1}{2}(\ln|a| + \ln|b|)$.

PROBLEME PROPUSE

1. Scrieți sub formă logaritmică următoarele egalități:

a) $2^4 = 16$; b) $4^{-2} = \frac{1}{16}$; c) $3^x = 15$; d) $\left(2\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{4}$.

2. Scrieți sub formă exponențială următoarele egalități:

a) $\log_2 8 = 3$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$; c) $\lg 0{,}001 = -3$; d) $\log_6 x = 12$.

3. Determinați valorile reale ale lui x pentru care sunt definiți următorii logaritmi:

a) $\log_2(x^2 - 2x)$; b) $\log_2(-2x^2 + 4)$; c) $\log_5(x^4 - 5x^2 + 4)$;

d) $\log_6(-x^2 + 8x - 16)$; e) $\log_2(\log_3 x)$; f) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$;

g) $\log_{\sqrt{2}}\left(4 - x^2\right)$; h) $\log_a(\log_a x)$; i) $\log_a(\log_b x)$;

j) $\log_{x-2}(x - 1)$; k) $\log_{2-|x|}(x^2 - 2)$; l) $\log_{x+1}(4 - x^2)$.

4. Determinați x în cazurile:

a) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; b) $\log_x 216 = 3$; c) $\log_x \frac{1}{81} = 4$; d) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$;

e) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$; f) $\log_{3\sqrt[3]{3}} x = -\frac{3}{2}$; g) $\log_{0,04} 5 = x$; h) $\log_x 0,125 = -2$.

5. Calculați:

a) $2^{\log_2 4}$; b) $3^{\log_3 6}$; c) $25^{\log_5 3}$; d) $36^{\log_6 2}$;

e) $81^{0,5\log_3 7}$; f) $\log_2(\log_4 16)$; g) $3^{2-\log_3 2}$; h) $4^{\sqrt{\log_4 5}} - 5^{\sqrt{\log_5 4}}$.

6. Să se logaritmeze expresiile următoare pentru $a > 0$, $b > 0$:

a) $\frac{4ab^3}{5\sqrt{2ab}}$; b) $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}\right)^4$; c) $\frac{a\sqrt{b\sqrt{a}}}{b\sqrt{a\sqrt{b}}}$; d) $\sqrt{a^{2+\sqrt{b}}}$; e) $\frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}}$.

7. Calculați b în funcție de a în cazurile:

a) $a = \log_{20} 2$; $b = \log_{20} 5$; b) $a = \log_2 3$; $b = \log_6 8$;

c) $a = \log_5 3$; $b = \log_{15} 27$; d) $a = \log_4 3$; $b = \log_8 36$.

8. Cunoscând a şi b, calculați c în cazurile:

a) $a = \log_{60} 4$, $b = \log_{60} 6$, $c = \log_{24} 2$;

b) $a = \log_{12} 2$, $b = \log_{12} 5$; $c = \log_6 40$.

9. Demonstrați că următoarele numere sunt iraționale:

a) $\log_2 3$; b) $\log_2 6$; c) $\log_5 15$; d) $\lg 5$.

10. Calculați:

a) $\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$; b) $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$.

11. Fie $a, b, x, y \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Demonstrați că $\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$.

12. Calculați:

a) $\sum_{k=1}^{89} \ln(\mathrm{tg} k^\circ)$; b) $\sum_{k=1}^{89} \lg(\mathrm{ctg} k^\circ)$; c) $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

13. Demonstrați că există $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ astfel încât $a^b \in \mathbb{Q}$.

14. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația $\ln(5^n x_n) = 3n$. Calculați:

a) x_0, x_1, x_2;

b) $x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Cuprins