MATEMATICĂ
PENTRU
MODELARE ECONOMICĂ

VOL. II

TATIANA CORINA DOSESCU

MATEMATICĂ PENTRU MODELARE ECONOMICĂ

VOL. II

EDITURA UNIVERSITARĂ
București, 2013

Redactor: Gheorghe Iovan
Tehnoredactor: Ameluța Vișan
Coperta: Angelica Mălăescu

Editură recunoscută de Consiliul Național al Cercetării Științifice (C.N.C.S.) și inclusă de Consiliul Național de Atestare a Titlurilor, Diplomelor și Certificatelor Universitare (C.N.A.T.D.C.U.) în categoria editurilor de prestigiu recunoscut.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
DOSESCU, TATIANA
Matematica pentru modelare economică / Tatiana Dosescu. -
București : Editura Universitară, 2011-2013
2 vol.
ISBN 978-606-591-308-0
Vol. 2. - 2013. - ISBN 978-606-591-856-6

51-7:33

DOI: (Digital Object Identifier): 10.5682/9786065918566

Editura Universitară
Director: Vasile Muscalu
B-dul. N. Bălcescu nr. 27-33, Sector 1, București
Tel.: 021 – 315.32.47 / 319.67.27
www.editurauniversitara.ro
e-mail: redactia@editurauniversitara.ro

Distribuție: tel.: 021-315.32.47 /319.67.27 / 0744 EDITOR / 07217 CARTE
comenzi@editurauniversitara.ro
O.P. 15, C.P. 35, București
www.editurauniversitara.ro

CUPRINS

PREAMBUL

Modelarea economică este prezentă în activitatea celor competenţi în a prelucra informaţia din domeniul economic.

O categorie importantă de fenomene economice se produc într-un mediu invadat de incertitudine, un factor care îl poate împiedica pe cel angajat să adopte decizia adecvată, generatoare de profit.

Abordarea mediului economic în care incertitudinea joacă un rol esenţial presupune o competenţă specială din partea celui care face această întreprindere, motiv pentru care acest volum se adresează studentului, licenţiatului sau masterandului în economie şi chiar tuturor acelor care doresc să dobândească această specializare.

Mijloace potrivite în depăşirea efectelor incertitudini există, iar aceste mijloace se dobândesc şi prin acumularea de cunoştinţe din teoria probabilităţilor sau din statistica matematică.

Modelarea economică primeşte un sprijin avizat în primul rând din partea teoriei probabilităţilor, care fiind o teorie matematică de sorginte empirică are ca obiect de studiu modelarea fenomenelor cu cel puţin o componentă aleatoare, atributul „aleator” certificând prezenţa incertitudinii în evoluţia fenomenului.

În al doilea rând, modelarea economică primeşte din partea statisticii matematice o ofertă consistentă de tehnici şi metode, special create pentru a elabora în condiţii de incertitudine decizii fundamentate riguros în domenii cum ar fi: comerţ, turism, marketing, finanţe, agricultură, industrie, asigurări de bunuri şi persoane, prognoza economică pe diferite termene, medicină şi enumerarea ar putea continua.

Acest volum este alcătuit formal din două capitole, numerotate prin 5 şi respectiv 6, marcându-se astfel continuarea numerotării începute în primul volum. Această continuare se justifică mai ales prin faptul că rezultatele expuse în primul volum constituie fundamentul cunoştinţelor prezentate în acest al doilea volum.

Cunoştinţele de teoria probabilităţilor expuse în capitolul 5 sunt grupate în următoarele secţiuni: introducere în teoria probabilităţilor, modelarea matematică a unei experienţe, dezvoltări ale modelului probabilist, modele probabiliste clasice, variabile aleatoare, caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare, funcția caracteristică, repartiții clasice unidimensionale, şiruri de variabile aleatoare.

Obiectul capitolului 6 îl formează secțiunile: teoria selecției, teoria estimației, verificarea ipotezelor statistice.

Conținutul capitolului 5 îl introduce pe cititor într-un spațiu în care gândirea probabilistă şi inventivitatea matematicianului probabilist a construit noțiuni şi instrumente teoretice adecvate cuantificării şansei de a se realiza într-un mediu incert a unui fenomen aleator. Cel care acumulează cunoştințele oferite în acest capitol dobândeşte competența de a modela probabilist fenomenele economice afectate de incertitudine.

Prezentarea din capitolul 6 se face într-un cadru oferit de modelarea matematică în general şi în particular de modelarea probabilistă. Prezentarea subliniază, de fiecare dată când este cazul, distanța existentă între modelul probabilist construit pe baza unor ipoteze şi realitatea statistică modelată, distanță care impune specificarea erorilor modelării pricinuite de prezența incertitudinii. Acumularea cunoştințelor din acest capitol generează competența de a gândi şi a modela statistic-inferențial.

Fiecare secțiune se încheie cu un rezumat, urmat de listarea conceptelor şi noțiunilor reprezentative, iar fiecare capitol se încheie cu aplicații rezolvate şi aplicații propuse spre rezolvare, cu răspunsurile aferente.

Capitolul 5

TEORIA PROBABILITĂȚILOR

5.1 Introducere în teoria probabilităților

Începuturile teoriei probabilităților se află în secolul XVII şi au fost generate de interesul în a cuantifica şansele de câştig ale unui participant la un joc de noroc, interes care nu şi-a pierdut din intensitate de-a lungul timpului, fiind prezent şi astăzi. Problema cuantificării unui fenomen este frecventă în ştiinţă sau în tehnică şi chiar în viaţa cotidiană, rezolvarea ei implicând mai multe eforturi ale gândirii, imaginației şi creativității colective, pornind de la o descriere cât mai exactă a fenomenului.

Încercarea de a preciza şi a descrie fenomenul numit şansă sau noroc a condus la elaborarea şi dezvoltarea unor instrumente teoretice care să măsoare magnitudinea şansei într-un cadru ştiinţific bine delimitat numit astăzi teoria probabilităților. Printre personalitățile ştiinţifice ale lumii care şi-au adus contribuţii semnificative la dezvoltarea acestei teorii se pot enumera G. Galileu la începutul secolului al XVII-lea, Fermat (1601 – 1665), Pascal (1623 – 1662) şi Huygens (1629 – 1695) care au studiat jocurile de noroc, Jacob Bernoulli (1654 – 1705) care a demonstrat legea numerelor mari, o teoremă fundamentală a teoriei probabilităților, Moivre (1667 – 1754) care a studiat repartiţia normală, ce a permis enunţarea şi demonstrarea teoremei limite centrale, Laplace (1749 – 1827) care expus concis fundamentele teoriei probabilităților şi a aplicat rezultatele teoretice în teoria erorilor de observare şi măsurare, Gauss (1777 – 1855) care a studiat în profunzime repartiţia normală şi a elaborat metoda celor mai mici pătrate deosebit de utilizată astăzi , Poisson (1781 – 1840) care a aplicat prima dată teoria probabilităților la studierea tragerilor cu armament, iar ca omagiu posteritatea a numit una din repartițiile discrete cu numele său, P. Cebâşev (1821 – 1894), care a elaborat metoda momentelor, A.Markov (1856 – 1922) care a pus bazele teoriei proceselor stochastice, A. Liapunov (1857 – 1918) care a elaborat metoda funcţiilor caracteristice, A.N. Kolmogorov (1903 – 1987) care a axiomatizat teoria probabilităților, creându-i fundamentul şi N. Wiener, W. Feller şi J. Doob care au dezvoltat teoria proceselor stochastice. Există o şcoală românească de teoria probabilităților întemeiată de academicienii Gheorghe Mihoc, Octav Onicescu, Ioan Cuculescu, Marius Iosifescu, care şi astăzi îşi aduce contribuții semnificative, atât teoretice cât şi în domeniul aplicațiilor teoriei probabilităților.

Într-o prezentare succintă, teoria probabilităților este o teorie matematică, esențial deductivă, de sorginte empirică, având ca obiect de studiu modelarea fenomenelor cu cel puțin o componentă întâmplătoare sau aleatoare. Noțiunea centrală a teoriei este probabilitatea, care se referă la aspectul cantitativ al categoriei filozofice de posibilitate, fiind o măsură a posibilității de producere sau realizare a unui eveniment aleator în condiții specificate.

5.1.1 Experiențe aleatoare. Noțiuni primare

În încercarea de a preciza condițiile generale în care apare nevoia de a cuantifica şansa de realizare a unui fenomen aleator constatăm că mai întâi trebuie să ne fixăm un vocabular de lungime minimă, ale cărui cuvinte să aibă un sens unic şi bine definit.

Din multitudinea de posibilități acest vocabular conține, pentru început, cuvintele experiență, experiență aleatoare, probă a unei experiențe, eveniment elementar, operații cu evenimente elementare, eveniment, realizarea unui eveniment, eveniment sigur, eveniment imposibil şi al căror sens îl prezentăm în continuare.

Prin **experiență** sau **experiment** înțelegem realizarea, chiar repetată, a unui complex de condiții materiale sau de altă natură, asupra cărora acționează un factor sau un set de factori, producându-se un efect sau rezultat, având mai multe componente în general. Iată câteva exemple de experiențe, în care acțiunea asupra complexului de condiții este un factor uman:

a) Într-o eprubetă în care se află acid clorhidric se introduce o bucată de cupru. Rezultatul experienței este o anumită cantitate de clorură de cupru şi o degajare de hidrogen.

b) Dintr-o urnă în care se află şase bile de aceleaşi dimensiuni, numerotate de la unu la şase se extrage la întâmplare o bilă. Rezultatul extragerii poate fi oricare din cele şase bile.

c) Se cronometrează durata operației de înregistrare a mărfurilor aflate în coşul de cumpărături ale unui client, de către o casieră a unui supermarket. Rezultatul poate fi o valoare aflată într-un interval de timp de forma (t_1, t_2).

d) Operația de cântărire a unui produs poate avea ca rezultat o valoare situată într-un interval $[a, b]$, exprimată în unități de greutate.

Diverse fenomene naturale se pot considera ca fiind realizarea unor complexe de condiții asupra cărora acționează factori naturali, astfel că ne vom referi la ele ca la nişte experiențe “organizate” de natură, ca de exemplu naşterea sau decesul, dezintegrarea unei substanțe radioactive, exploziile vulcanice, revărsările unui râu, cutremurele de pământ, diverse fenomene astronomice: eclipse, apariția meteoriților sau a cometelor, etc..

Sintagmele **aleator**, **întâmplător**, **incert** sau **aleatoriu** sunt sinonime şi semnifică atributele de a fi imprevizibil, fortuit, neprevăzut, incontrolabil, nesigur sau imposibil de anticipat. După cum rezultatul unei experiențe este sau nu complet cunoscut înainte de desfăşurarea ei, experiențele se clasifică în **deterministe** sau **aleatoare**.

O experiență este **deterministă** dacă rezultatul său este previzibil, sigur şi complet cunoscut, chiar înainte de desfăşurarea ei. Astfel, exemplul a) prezintă o experiență determinată, având în vedere că rezultatul ei este prevăzut de teoria reacțiilor chimice şi orice reluare a experienței are acelaşi rezultat. Apariția soarelui în cursul unei zile şi apariția unei comete cunoscute se pot considera experiențe deterministe, deoarece astronomii pot prevedea cu exactitate aceste apariții, conform legilor mişcării corpurilor cereşti.

O experiență este **aleatoare** (engl. **random experiment**) dacă rezultatele ei nu pot fi prevăzute cu exactitate, cunoscându-se doar o clasă de rezultate posibile ale acesteia. Astfel, exemplele b), c) şi d) prezintă experiențe aleatoare, deoarece rezultatul acestor experiențe nu este previzibil şi face parte dintr-o clasă de rezultate posibile. Deoarece nu pot fi prevăzute cu exactitate naşterile sau decesele, cutremurele sau exploziile vulcanice, dar şi revărsările apelor se pot considera fenomene aleatoare naturale, ce fac parte din categoria experiențelor aleatoare.

Precizare. Experiențele aleatoare sunt în atenția teoriei probabilităților, nu şi experiențele deterministe.

Din acest motiv se vor considera numai experiențe aleatoare, numite pe scurt **experiențe** sau **experimente.**

Prin **probă** (engl. **trial**) a unei experiențe se înțelege o realizare efectivă a experienței care produce un rezultat, ce aparține unei clase de rezultate posibile ataşate experienței. Unii autori au numit probă rezultatul experienței şi nu realizarea experienței în sine.

Sintagma **eveniment elementar** (engl. **simple eveniment**) desemnează rezultatul unei singure probe a unei experiențe, ce face parte din clasa de rezultate posibile şi se poate vorbi despre clasa tuturor evenimentelor elementare generate de o experienţă, ce se va numi **spaţiul observaţiilor** (engl. **sample space**). În acest context, dacă rezultatul unei probe este un eveniment elementar, notat prin A, atunci se spune că evenimentul A **s-a realizat în acea probă**.

Exemplu.

Se aruncă un zar pe o suprafaţă plană. Spaţiul observaţiilor este alcătuit din şase evenimente elementare, ce reprezintă apariţia feţei cu unul, două, trei, patru, cinci şi respectiv şase puncte. Cu ajutorul evenimentelor elementare putem răspunde la întrebări cum ar fi: se poate obţine la aruncarea zarului o faţă cu un număr par de puncte?

Răspunsul poate fi formulat astfel: la apariţia oricăreia din feţele cu două **sau** patru **sau** şase puncte.

Astfel de întrebări sugerează că pentru evenimentele elementare ce alcătuiesc spaţiul observaţiilor generate de o experienţă, să se considere operaţia "sau" *de compunere* a două evenimente elementare al cărei rezultat este numit **eveniment compus**, pe scurt **eveniment**. Un astfel de eveniment **se realizează într-o probă**, dacă în acea probă se realizează unul sau altul din evenimentele elementare ce îl compun.

Dacă notăm operaţia "sau" prin $\vee$ şi evenimentele elementare prin respectiv $A_1, A_2, ..., A_6$, atunci răspunsul de mai sus capătă forma: $A_2 \vee A_4 \vee A_6$.

Putem să ne întrebăm ce reprezintă scrierea $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5 \vee A_6$. Conform celor de mai sus, este vorba de evenimentul care se realizează la apariţia oricăreia din feţele zarului şi nu există nicio îndoială că acest eveniment se realizează, indiferent de probă. Acest eveniment, remarcabil prin *siguranţa cu care se realizează* se numeşte evenimentul **sigur** şi este notat prin S.

La întrebarea dacă se poate obţine o faţă cu mai multe puncte decât şase sau cu zero puncte ori două sau mai multe feţe odată, fără nicio îndoială putem răspunde negativ. Aici este vorba de un alt eveniment remarcabil prin *imposibilitatea de a se realiza*, indiferent de probă, numit evenimentul **imposibil**, care este notat prin L. Se observă că nu se poate exprima evenimentul imposibil cu ajutorul operaţiei "sau".

Rezultă că experienţa cu zarul generează şase evenimente elementare, evenimentul sigur, evenimentul imposibil, evenimentele de forma $A_i \vee A_j, i, j \in \{1,2,...,6\}, i \neq j$, în număr de $C_6^2 = 15$, evenimentele de forma $A_i \vee A_j \vee A_k, i, j, k \in \{1,2,...,6\}, i \neq j, i \neq k, j \neq k$, în număr de $C_6^3 = 20$, evenimentele de forma $A_i \vee A_j \vee A_k \vee A_m, i, j, k, m \in \{1,2,...,6\}$, unde cei patru indici sunt distincţi doi câte doi, în număr de $C_6^4 = 15$ şi evenimentele de forma $A_i \vee A_j \vee A_k \vee A_m \vee A_n, i, j, k, m, n \in \{1,2,...,6\}$, unde cei cinci indici sunt distincţi doi câte doi, în număr de $C_6^5 = 6$. Altfel spus, numărul tuturor evenimentelor generate de experienţa cu zarul este $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6$.

Clasa tuturor evenimentelor generate de o experienţă se va numi **spaţiul rezultatelor**.

Între evenimentele din spaţiul rezultatelor, care sunt generate de o experienţă fixată, alături de operaţia "sau" se mai pot defini încă trei **operaţii**: "şi", notată $\wedge$, "opusul", notat $\neg$, "minus", notat -.

Pentru a defini, în general cele patru operaţii de mai sus considerăm două evenimente, notate prin A şi B, dintre evenimentele generate de experienţă.

Evenimentul "A sau B", notat $A \vee B$, este acel eveniment care se realizează într-o probă, dacă se realizează în acea probă fie evenimentul A, fie evenimentul B.

Evenimentul "A şi B", notat $A \wedge B$, este acel eveniment care se realizează într-o probă, dacă se realizează în acea probă şi evenimentul A şi evenimentul B.

Evenimentul "opusul lui A", notat $\neg A$, este acel eveniment care se realizează într-o probă, dacă în acea probă nu se realizează evenimentul A. De exemplu, evenimentul sigur este opusul evenimentului imposibil şi invers.

Evenimentul "A minus B", notat $A - B$, este acel eveniment care se realizează într-o probă, dacă în acea probă se realizează evenimentul A şi nu se realizează evenimentul B.

Exerciţiu.

Cum ştim dacă unul din evenimentele $B \vee A, B - A$ şi $\neg B$ s-a realizat ? Cine este evenimentul $\neg S$? Propunem cititorului să dea răspunsurile complete.

Observaţie.

Dacă spaţiul observaţiilor determinat de o experienţă este alcătuit dintr-un număr finit de evenimente elementare, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci numărul tuturor evenimentelor generate de experienţă este 2^n.

Exerciţiu.

Propunem cititorului să indice o experienţă cu cel puţin cinci evenimente elementare, la care să precizeze spaţiul observaţiilor şi spaţiul rezultatelor.

5.1.2 Aplicație demonstrativă

Dintr-o urnă cu trei bile de acelaşi fel, numerotate de la unu la trei se extrage la întâmplare o bilă. Rezultatul experienței poate fi unul din evenimentele elementare „bila cu numărul unu”, notat A_1, „bila cu numărul doi” , notat A_2 şi „bila cu numărul trei”, notat A_3. Atunci spațiul observațiilor ataşat experienței este format din rezultatele sau evenimentele elementare A_1, A_2 şi A_3. Conform observației de mai sus numărul tuturor evenimentelor generate de experiență este $2^3 = 8$ şi anume: $L, A_1, A_2, A_3, A_1 \vee A_2, A_1 \vee A_3, A_2 \vee A_3, S$.

Cu ajutorul operațiilor se obțin şi următoarele evenimente:

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3,\ \neg A_1, \neg A_2, \neg A_3,\ (A_i \vee A_j) \vee A_k,$$
$$A_i \vee (A_j \vee A_k), (A_i \vee A_j) \wedge A_k,\ A_i \wedge (A_j \vee A_k),\ A_i \vee A_j \vee A_k,$$
$$(A_i \vee A_k) \vee (A_j \wedge A_k),\ (A_i \vee A_j) \wedge (A_k \vee A_m),,\ A_i \wedge (A_j \vee A_k \vee A_m),$$
$$(A_i \vee A_j) \wedge (A_j \vee A_k \vee A_m),\ i, j, k, m \in \{1,2,3\},\ (A_1 \vee A_2) - (A_2 \vee A_3),$$
$$(A_i \vee A_j) - A_k,\ i, j, k \in \{1,2,3\}.$$

Aici parantezele delimitează un eveniment compus.

Observăm că evenimentul $A_1 \vee A_2$ se realizează într-o probă, dacă şi numai dacă în acea probă se realizează evenimentul $A_2 \vee A_1$. Ca urmare, cele două evenimente sunt **identice** şi scriem $A_1 \vee A_2 \equiv A_2 \vee A_1$. Imediat observăm că $A_1 \vee A_3 \equiv A_3 \vee A_1, A_2 \vee A_3 \equiv A_3 \vee A_2$.

În general, fie o experiență care generează evenimentele A şi B. Evenimentul A este **identic** cu evenimentul B şi se scrie $A \equiv B$, dacă nu există nicio probă în care să se realizeze unul fără ca şi celălalt să se realizeze. Altfel spus, cele două evenimente nu se pot distinge unul de celălalt.

Se poate realiza evenimentul $A_1 \wedge A_2$? Nu, deoarece ar trebui să se realizează simultan evenimentele A_1 şi A_2, ceea ce este imposibil. Deci se poate scrie: $A_1 \wedge A_2 \equiv L$. Printr-un raționament analog deducem: $A_1 \wedge A_3 \equiv L, A_2 \wedge A_3 \equiv L,\quad A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \equiv L$, iar în general, deducem $A_i \wedge A_j \equiv L$, dacă $i \neq j, i, j \in \{1,2,3\}$, $A_i \wedge A_j \equiv A_i$, dacă $i = j, i, j \in \{1,2,3\}$.

Cine este evenimentul $A_i \wedge A_j \wedge A_k$? În ce condiții $A_i \wedge A_j \wedge A_k$ nu este identic cu evenimentul imposibil? Propunem cititorului să dea răspunsurile complete.

Când se realizează evenimentul $A_1 \vee A_2 \vee A_3$? Atunci când se realizează sau A_1 sau A_2 sau A_3, adică în orice probă a experienței. Cu alte cuvinte, evenimentul $A_1 \vee A_2 \vee A_3$ este evenimentul sigur. Deci se poate scrie:

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \equiv S.$$

Se pot pune următoarele întrebări: cine este evenimentul $A_i \vee A_j \vee A_k$? În ce condiții $A_i \vee A_j \vee A_k \equiv S$? Lăsăm cititorul să afle răspunsul la prima întrebare şi răspundem la cea de a doua, astfel: relația este adevărată ori de câte ori $i \neq j, j \neq k, k \neq i$, $i, j, k \in \{1,2,3\}$.

Cine este evenimentul $\neg A_1$? Este evenimentul care se realizează când nu se realizează A_1, adică atunci când se realizează evenimentul elementar A_2 sau când se realizează evenimentul elementar A_3. Prin urmare, $\neg A_1$ este identic cu evenimentul compus $A_2 \vee A_3$ şi se poate scrie $\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3$. Analog se deduce $\neg A_2 \equiv A_1 \vee A_3$.

Cine este evenimentul $\neg A_3$? Dar cine este evenimentul $\neg(A_2 \vee A_3)$? Propunem cititorului să afle răspunsurile. În ajutor vine răspunsul la următoarea întrebare: ce se poate spune despre evenimentul $\neg(\neg A_3)$? Este evenimentul care se realizează când nu se realizează evenimentul $\neg A_3$, adică când se realizează A_3 şi deci $\neg(\neg A_3) \equiv A_3$. Utilizând acelaşi raționament se deduce că:

$$\neg(\neg A_i) \equiv A_i, \forall i = \overline{1,3}.$$

Este adevărată afirmația că evenimentele $(A_i \vee A_j) \vee A_k, A_i \vee (A_j \vee A_k)$, $A_i \vee A_j \vee A_k$, $i, j, k \in \{1,2,3\}$ sunt identice? Cum se justifică răspunsul corect?

Indicație: răspunsul este identic cu răspunsul la întrebarea: este adevărată scrierea $\neg(A_2 \vee A_3) \equiv A_1$?

Să determinăm evenimentul $(A_i \vee A_j) \wedge A_k$. Pentru $i = k$ sau $j = k$ el este identic cu evenimentul A_k, în rest este identic cu evenimentul imposibil, deoarece $A_i \vee A_j$ este identic cu $\neg A_k$ pentru $i \neq j$ şi identic cu L pentru $i = j \neq k$. Propunem cititorului să stabilească dacă este adevărată relația:

$$(A_i \vee A_j) \wedge A_k \equiv (A_i \wedge A_k) \vee (A_j \wedge A_k),\ i, j, k \in \{1,2,3\}.$$

Evenimentul $(A_i \wedge A_j) \vee (A_i \wedge A_k), i, j, k \in \{1,2,3\}$ este identic cu evenimentul imposibil dacă $j \neq i$ şi $k \neq i$, altfel este identic cu A_i. Adică este adevărată relaţia $A_i \wedge (A_j \vee A_k) \equiv (A_i \wedge A_j) \vee (A_i \wedge A_k)$. Analog se deduce relaţia:

$$(A_i \vee A_j) \wedge A_k \equiv (A_i \wedge A_k) \vee (A_j \wedge A_k), i, j, k \in \{1,2,3\}.$$

Evenimentul $(A_i \vee A_j) \wedge (A_k \vee A_m), i, j, k, m \in \{1,2,3\}$ este identic cu evenimentul reprezentat de una din paranteze dacă cele două paranteze sunt identice, este identic cu evenimentul imposibil dacă cele două paranteze sunt diferite şi nu au nici un eveniment comun, iar altfel este identic cu evenimentul comun celor două paranteze.

Evenimentul $A_i \wedge (A_j \vee A_k \vee A_m), i, j, k, m \in \{1,2,3\}$ este identic cu evenimentul imposibil dacă indicii j, k şi m sunt distincţii toţi odată de indicele i, iar altfel este identic cu evenimentul A_i. O variantă remarcabilă se obţine în cazul $j \neq k, j \neq m, k \neq m$:

$$A_i \wedge S \equiv A_i, \forall i = \overline{1,3}.$$

Evenimentul $(A_i \vee A_j) \wedge (A_j \vee A_k \vee A_m)$ $i, j, k, m \in \{1,2,3\}$ este identic cu evenimentul A_j dacă indicii i, k şi m sunt diferiţi doi câte doi, altfel este identic cu evenimentul $A_i \vee A_j$.

Evenimentul $(A_1 \vee A_2) - (A_2 \vee A_3)$ este cel care se realizează la realizarea evenimentului din prima paranteză şi la nerealizarea celei de-a doua paranteze. Deoarece evenimentul elementar A_2 se află în ambele paranteze, ca eveniment care se realizează dar şi ca eveniment care nu se realizează, el nu intră în compunerea rezultatului. Pe de altă parte A_3 nu trebuie să se realizeze şi deci nu se poate afla în rezultat. Singur A_1 formează rezultatul. Deci:

$$(A_1 \vee A_2) - (A_2 \vee A_3) \equiv A_1.$$

Lăsăm cititorului să descopere cine este evenimentul $(A_i \vee A_j) - A_k$, $i, j, k \in \{1,2,3\}$.

Observaţii.

1. Analiza evenimentelor generate de experienţa de mai sus ne-a condus la introducerea relaţiei **„identic"**, notată prin „$\equiv$", care are sens şi în cazul general între evenimente generate de o experienţă oarecare.

2. Se observă că: $A_1 \wedge A_2 \equiv A_1 \wedge A_3 \equiv A_2 \wedge A_3 \equiv L$, aici am folosit tranzitivitate relaţiei „identic", şi $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \equiv S$.

Între evenimentele generate de o experiență se poate considera o nouă relație, numită relația „**implică”**, alături de relația „**identic”**.

Să ne fixăm o experiență care generează evenimentele A şi B. Evenimentul A **implică** evenimentul B şi se scrie $A \prec B$, dacă realizarea evenimentului A asigură realizarea evenimentului B. Dacă A şi B sunt evenimente elementare, atunci între ele nu există relația „implică”, altfel între ele poate să existe această relație.

Relația „identic” se poate exprima cu ajutorul relației „implică” astfel:

$$A \equiv B \text{, dacă şi numai dacă } A \prec B \text{ şi } B \prec A.$$

Faptul că evenimentele A şi B nu sunt identice, înseamnă că sunt diferite şi se notează $A \neq B$.

La întrebarea dacă există o probă a experienței în care să se realizeze împreună evenimentele A şi B, răspunsul presupune considerarea a două situații: a) există cel puțin o probă în care se realizează ambele evenimente şi b) nu există nicio probă în care să se realizeze ambele evenimente. Astfel, trebuie considerate două tipuri de evenimente.

Evenimentele A şi B se numesc **compatibile**, dacă evenimentul $A \wedge B$ nu este evenimentul imposibil. În caz contrar A şi B se numesc **incompatibile**, adică $A \wedge B \equiv L$. Un exemplu de evenimente incompatibile este dat de oricare două evenimente elementare, afirmație ilustrată şi de punctul 2 al observației de mai sus.

Exemplu.

Se consideră următoarele evenimente generate de experiența prezentată în aplicația demonstrativă: L, A_1, A_3, $A_1 \vee A_2$, $A_2 \vee A_3$, S. Să stabilim relațiile dintre aceste evenimente şi perechile de evenimente compatibile.

Realizarea evenimentului A_1 asigură realizarea evenimentelor $A_1 \vee A_2$ şi S; prin urmare sunt adevărate relațiile $A_1 \prec A_1 \vee A_2$ şi $A_1 \prec S$. Deoarece realizarea evenimentului A_3 asigură realizarea evenimentelor $A_2 \vee A_3$ şi S sunt adevărate relațiile $A_3 \prec (A_2 \vee A_3)$ şi $A_3 \prec S$. Deoarece $S \equiv A_1 \vee A_2 \vee A_3$ se poate scrie $A_1 \vee A_2 \prec S$ şi $A_2 \vee A_3 \prec S$.

În proba în care se realizează evenimentul A_1 se realizează şi evenimentele $A_1 \vee A_2$ şi S, iar în proba în care se realizează evenimentul $A_1 \vee A_2$ se realizează şi evenimentul S; prin urmare, perechile de evenimente A_1 şi $A_1 \vee A_2$, A_1 şi S, $A_1 \vee A_2$ şi S sunt perechi de evenimente compatibile. Printr-un raționament analog se ajunge la concluzia că A_3 şi $A_2 \vee A_3$, A_3 şi S, $A_2 \vee A_3$ şi S sunt perechi de evenimente compatibile. Şi perechea formată din evenimentele $A_1 \vee A_2$ şi $A_2 \vee A_3$ este formată din evenimente compatibile.

Nu există nicio probă a experienţei în care să se realizeze simultan evenimentele A_1 şi A_3, L şi A_1, L şi A_3, L şi S; prin urmare se poate scrie $A_1 \wedge A_3 \equiv L, L \wedge A_1 \equiv L, L \wedge A_3 \equiv L, L \wedge S \equiv L$, adică cele patru perechi sunt formate din evenimente incompatibile.

Propunem cititorului să afle cum sunt evenimentele A_2 şi A_3, A_2 şi L, A_2 şi S, $A_2 \vee A_3$ şi A_1, $A_2 \vee A_3$ şi S.

Care sunt perechile de evenimente de forma (A,B), unde A şi B sunt din aplicaţia demonstrativă, ce satisfac relaţia $(A_1 \vee A) \wedge (A_2 \vee B) \equiv L$? Răspunsul este reprezentat de următoarele 8 perechi de evenimente $(L,L), (L,A_2), (L,A_3)$, (A_1,L), (A_3,L), (A_1,A_2), (A_1,A_3), (A_3,A_2).

Întrebare.

Se poate spune că una dintre perechile de evenimente de forma (A,B) reprezintă un eveniment?

Pentru ca o pereche de forma (A,B) să reprezinte un eveniment ar trebui să existe o experienţă care să genereze evenimente de această formă. Experienţa despre care este vorba în exerciţiu nu satisface această condiţie şi deci o pereche de forma (A,B) nu reprezintă un eveniment. Totuşi, se pot considera cel puţin trei exemple de experienţe, care generează evenimente de forma (A,B).

a) Din urna cu cele trei bile se extrag pe rând, la întâmplare, două bile, fără a reintroduce în urnă bila extrasă. Atunci spaţiul observaţiilor conţine $A_3^2 = 3 \cdot 2$ elemente şi este alcătuit din evenimentele elementare reprezentate de perechile de evenimente $(A_1,A_2), (A_1,A_3)$, (A_2,A_1), (A_2,A_3), $(A_3,A_1), (A_3,A_2)$, iar numărul tuturor evenimentelor generate de experienţă este $2^6 = 64$, pentru că alături de evenimentele elementare se află evenimentul imposibil, evenimentele compuse obţinute cu operaţia $\vee$ şi evenimentul sigur. Din cele 8 perechi de evenimente aflate în discuţie constatăm că perechile $(L,L), (L,A_2)$, $(L,A_3), (A_1,L)$, (A_3,L) sunt identice cu evenimentul imposibil, iar celelalte trei sunt evenimente elementare. Concluzia este că această experienţă este adecvată pentru a da răspunsul la întrebarea de mai sus.

b) Din urna cu cele trei bile se extrag pe rând, la întâmplare, două bile, reintroducând în urnă bila extrasă. Atunci spaţiul evenimentelor elementare este alcătuit din 9 perechi, adăugându-se la cele 6 perechi de la punctul a) şi