CONSTANTIN MANTEA
MIHAELA GARABET

FIZICĂ

Manual pentru clasa a 11-a

F1

Filiera teoretică / profil real / specializările: matematică-informatică şi ştiinţe ale naturii; **filiera vocaţională / profil militar MApN / specializarea** matematică-informatică

Editura ALL

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Cercetării nr. 4446 din 19.06.2006 în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică prin Ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

FIZICĂ – Manual pentru clasa a XI-a: F1
Constantin MANTEA, Mihaela GARABET

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
MANTEA, CONSTANTIN
Fizică: manual pentru clasa a XI-a: F1 / Constantin Mantea, Mihaela Garabet. – București: **ALL**, 2006
Bibliogr.
ISBN (10) 973-571-674-7; ISBN (13) 978-973-571-674-5

I. Garabet, Mihaela

53(075.35)

Referenți: prof. gr. I **Liviu Blanariu**
prof. gr. I **Daniela Beuran**

Redactor: **Mihaela Garabet**
Coperta colecției: **Alexandru Novac**
Tehnoredactare: **Niculina Stoica**

Editura **ALL** Bd. Constructorilor nr. 20A, et. 3,
sector 6, cod 060512 – București
Tel.: 021 402 26 00
Fax: 021 402 26 10

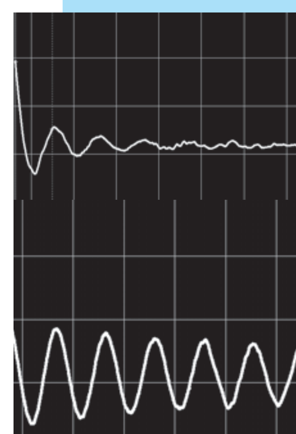
Distribuție: Tel.: 021 402 26 30; 021 402 26 33
Comenzi: comenzi@all.ro
URL: http://www.all.ro

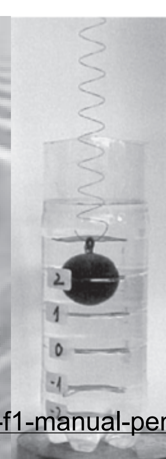
Capitolul 1

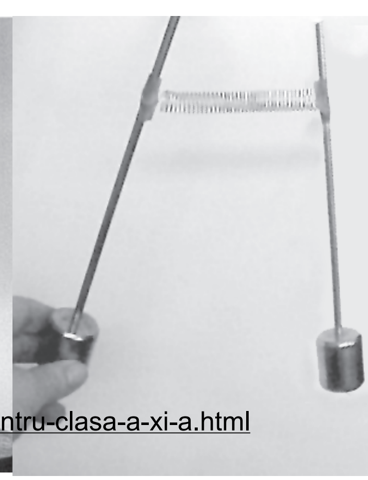
Oscilații și unde mecanice

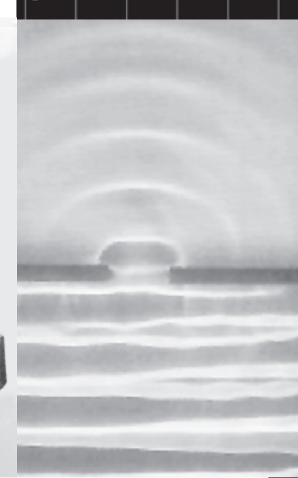
În acest capitol veți studia:

* Subcapitole cu caracter opțional









1.1. Oscilatorul mecanic

1.1.1. Fenomene periodice. Procese oscilatorii în natură și în tehnică

În secolul al XVI-lea, Galileo Galilei cronometra oscilația unui candelabru din Catedrala din Pisa cu ajutorul propriului său puls. El constata că mișcarea acestuia este din ce în ce mai puțin amplă, datorită forțelor de rezistență întâmpinate la înaintare. În natură apar multe tipuri de oscilații. De la vibrația corzilor vocale la cea din corzile și tuburile instrumentelor muzicale, de la ticăitul ceasurilor clasice, la legănatul în balansoare, de la mișcarea de agitație termică care duce la încălzirea ceștii în care s-a turnat ceai fierbinte, la mișcările scoarței terestre în timpul seismelor, avem de-a face cu existența unei surse de oscilație.

De câte ori o forță acționează asupra unui corp scoțându-l din poziția de echilibru stabil, acesta va oscila sub acțiunea unei forțe de revenire până la restabilirea ei.

Atunci când deplasarea față de poziția de echilibru este mică, forța de revenire depinde liniar de deplasare (într-o aproximație destul de bună) și oscilația se numește armonică fiind descrisă cu ajutorul funcțiilor armonice sin sau cos.

Exemple:

1. O bilă metalică este lăsată liberă la marginea unui recipient semisferic. Ea va efectua o mișcare oscilatorie, în jurul poziției sale de echilibru stabil, aflate în poziția cea mai joasă a recipientului (figura 1.1.1.1).

Forța care va readuce bila spre poziția de echilibru este componenta tangențială a greutății sale, Gt, care reprezintă cauza acestei oscilații (figura 1.1.1.2).

2. Alt oscilator este diapazonul lovit cu un ciocănel de lemn. Vibrația pe care o produce se va propaga prin aerul atmosferic, din aproape în aproape, dând naștere la ceea ce numim ***undă sonoră***. Oscilația diapazonului din figura 1.1.1.3, acordat pentru a emite nota LA, a fost înregistrată spre a fi „vizualizată” cu ajutorul unui microfon (exploratorul sonic din figura 1.1.1.3) cuplat cu o placă de achiziție de semnal, instalată într-un computer. Amplitudinea semnalului înregistrat este proporțională cu amplitudinea oscilației diapazonului (figura 1.1.1.4).

Acest sistem de achiziție de semnale va fi prezent în mai multe experimente descrise în acest manual. Dacă vom studia sunete vom utiliza ca senzori microfoane, dacă vom studia alte tipuri de oscilații mecanice vom utiliza alți senzori cuplați cu placa de achiziție de semnal din computer.

Sistemele reale oscilează amortizat: amplitudinile scad treptat din cauza acțiunii forțelor de frecare și a forțelor de rezistență la înaintarea prin mediu.

Mișcările oscilatorii pot fi întâlnite în tehnică, în timpul funcționării unor mașini precum ciocanul pneumatic, ciocanul hidraulic etc. Motoarele vehiculelor grele produc trepidații ale pieselor componente, ale pereților clădirilor pe lângă care trec. Efectele distructive ale trepidațiilor trebuie împiedicate prin utilizarea de amortizoare.

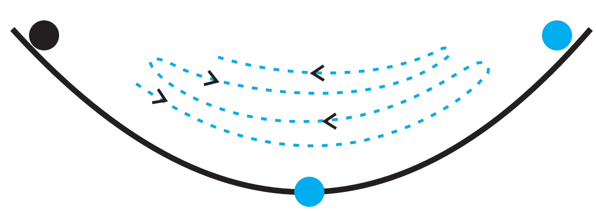


Fig. 1.1.1.1 – Mișcare oscilatorie

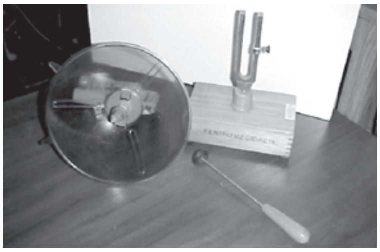


Fig. 1.1.1.3 – Exploratorul sonic utilizat pentru „vizualizarea” sunetelor emise de diapazon

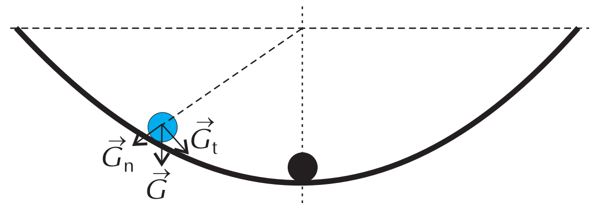


Fig. 1.1.1.2 – Forța de revenire în poziția de echilibru este componenta tangențială a greutății

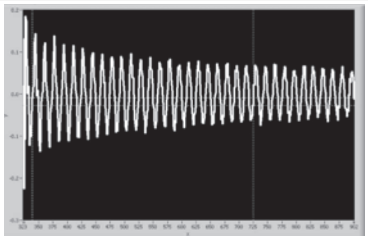


Fig. 1.1.1.4 – Semnalul corespunzător oscilației sonore LA a diapazonului

Definiție: Se numește ***mișcare periodică*** a unui punct material acea mișcare care se repetă la intervale de timp egale.

Observație: În clasa a 9-a ați studiat o astfel de mișcare periodică: mișcarea circulară uniformă.

ACTIVITATE EXPERIMENTALĂ

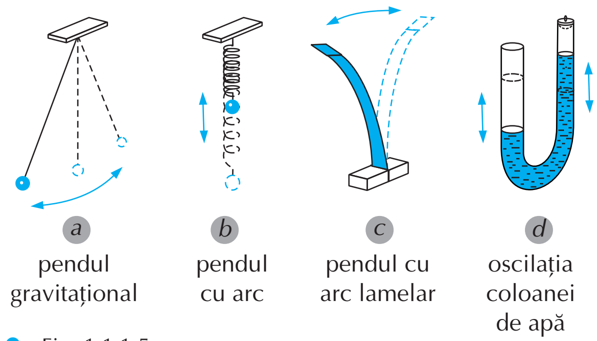


Fig. 1.1.1.5

Realizați dispozitivele din figura 1.1.1.5.

Scoateți corpurile din poziția de echilibru, așa cum se indică în figură și, apoi, lăsați-le libere. Ce observați?

În toate cazurile se constată că:

a) mișcarea este periodică;

b) corpul se deplasează mereu pe aceeași traiectorie;

c) mișcarea se realizează simetric față de poziția de echilibru;

d) mișcarea se efectuează între două poziții limită, numite ***puncte de întoarcere***, situate de o parte și de cealaltă a poziției de echilibru.

Definiție: Se numește ***mișcare oscilatorie*** acea mișcare periodică a unui sistem fizic care se efectuează pe aceeași traiectorie, de o parte și de alta a poziției sale de echilibru.

Observație: Când sistemul parcurge traiectoria complet, și într-o parte și în cealaltă, se spune că a efectuat o ***oscilație completă***.

1.1.2. Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii

Vom defini câteva mărimi fizice necesare studiului mișcării oscilatorii. Unele dintre ele au fost prezentate și în clasa a 9-a, în lecția intitulată *Mișcarea circulară uniformă.* Este vorba despre perioadă și frecvență.

Definiție: Se numește ***perioadă*** a mișcării oscilatorii mărimea fizică notată T definită de relația:

$$T = \frac{\Delta t}{N},$$

unde Δt este timpul în care sistemul efectuează N oscilații complete, $[T]_{SI} = 1$ s.

Observație: Pentru $N = 1$ rezultă $T = \Delta t$. Deci: *perioada T este timpul necesar efectuării unei oscilații complete.*

Definiție: Se numește ***frecvență*** a mișcării oscilatorii mărimea fizică scalară ν definită de relația:

$$\nu = \frac{N}{\Delta t},$$

Observații:

1) Luând $\Delta t = 1$ s rezultă $\nu = N$. Deci: *frecvența măsoară numărul de oscilații efectuate într-o secundă.*

2) Unitatea de măsură a frecvenței se numește Hertz (Hz): $[\nu]_{SI} = 1\,s^{-1} = 1\ Hz$.

3) Din definițiile perioadei și a frecvenței rezultă că $\nu \cdot T = 1$.

Definiție: Se numește ***elongație*** a mișcării oscilatorii, notată cu x sau y, deplasarea oscilatorului, la un moment dat, față de poziția sa de echilibru.

Observație: $[x]_{SI} = 1$ m.

Definiție: Se numește ***amplitudine*** a mișcării oscilatorii mărimea fizică scalară A egală cu modulul elongației maxime x_{max} pe care o poate avea oscilatorul în cursul oscilației:

$$A = |x_{max}|.$$

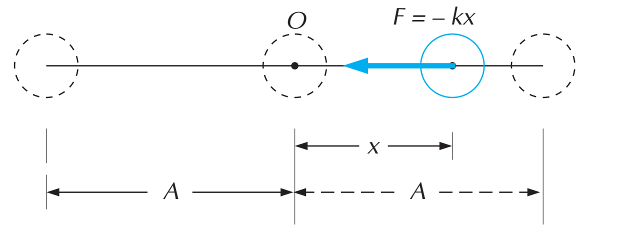


Fig. 1.1.2.1

Observație: Amplitudinea este, conform definiției, pozitivă întotdeauna. Ea reprezintă distanța dintre poziția de echilibru și punctul de întoarcere (figura 1.1.2.1).

Definiție: Se numește ***mișcare oscilatorie neamortizată*** acea mișcare oscilatorie în care amplitudinea *nu se schimbă* de la o oscilație la alta.

Mișcarea oscilatorie neamortizată este un model ideal. În practică, datorită frecărilor, sistemul pierde energie și, corespunzător, amplitudinea oscilațiilor devine din ce în ce mai mică.

1.1.3. Oscilații mecanice amortizate

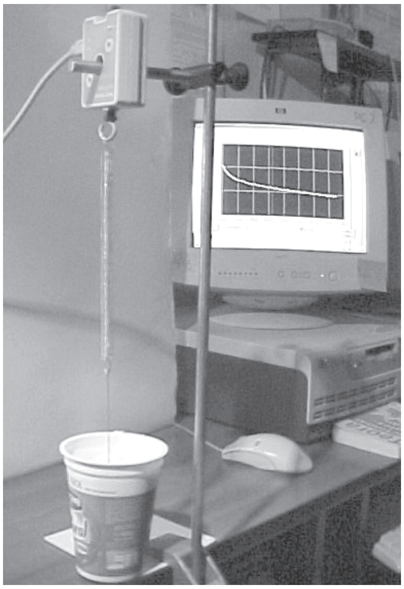


Fig. 1.1.3.1 – Sistem computerizat pentru achiziții de semnale utilizat în studiul mișcării oscilatorii a unui pendul elastic

În timpul mișcărilor oscilatorii sistemele pierd energie prin interacțiunea cu mediul, ceea ce duce la scăderea amplitudinii, adică la amortizarea lor și implicit la stingerea treptată a oscilațiilor.

Oscilația a cărei amplitudine scade în timp se numește ***oscilație amortizată***.

Prin utilizarea plăcii de achiziție de semnal instalată în computer am înregistrat spre a vizualiza semnalul generat de un senzor de forță, în cârligul căruia a fost suspendat un pendul elastic care oscilează (figura 1.1.3.1). Senzorul de forță indică valoarea forței elastice din resortul pendulului, deci semnalul pe care îl achiziționează este proporțional cu elongația oscilației acestuia. Mișcarea pendulului a avut loc inițial în aer, apoi în apă. Observați semnalele înregistrate în figurile 1.1.3.2.și 1.1.3.3.

Ce se întâmplă cu amplitudinea de oscilație?

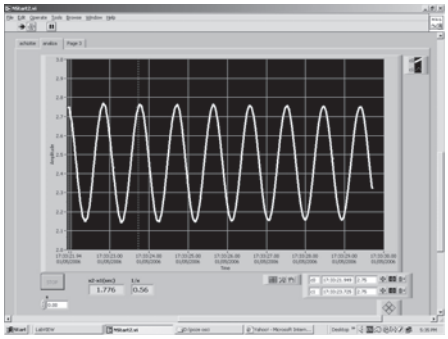


Fig. 1.1.3.2

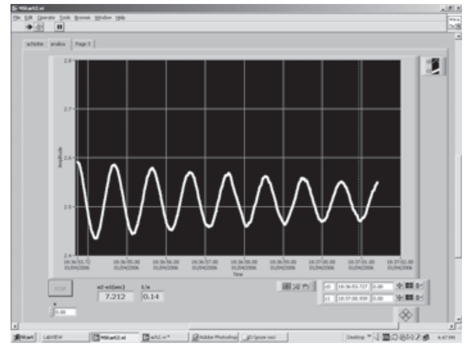


Fig. 1.1.3.3

În timpul mișcării, asupra corpului suspendat de resort acționează o forță de rezistență la înaintarea prin mediu. Evident, forța este mai puternică în apă decât în aer, ceea ce produce amortizarea vizibilă în figura 1.1.3.3.

Disiparea energiei oscilatorului în mediu este un proces complex care, în general, nu se face numai sub acțiunea acestei forțe. Într-o aproximare suficient de bună, forța de rezistență la înaintarea prin fluid este direct proporțională cu viteza corpului și poate fi descris de relația:

$$R = -r \cdot v$$

unde r este ***coeficientul de rezistență*** la înaintarea prin fluid,

$$[r]_{SI} = 1\frac{kg}{s}$$

Valoarea acestui coeficient, în cazul când fluidul este aerul, este suficient de mică pentru a considera forța R neglijabilă.

Dacă fluidul utilizat este apa, amplitudinea oscilației scade în timp după legea:

$$A = A_0 \cdot e^{-b \cdot t}$$

unde A este amplitudinea la momentul de timp t, A_0 este amplitudinea la momentul inițial, iar b este ***coeficientul de amortizare***, o altă mărime caracteristică mișcărilor oscilatorii amortizate.

$$[b]_{SI} = 1s^{-1}$$

În cazul când oscilația are loc în apă, urmărim după câte oscilații complete (N_0) amplitudinea scade la jumătate. Definim ***decrementul logaritmic*** D prin relația:

$$D = b \cdot T'$$

Unde T' este perioada de oscilație în apă. Decrementul logaritmic D se poate calcula în practică

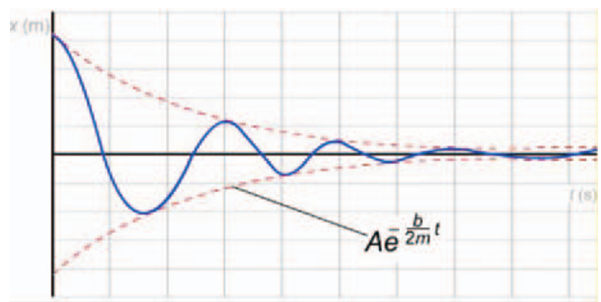


Fig. 1.1.3.4 – Dependența de timp a amplitudinii mișcării oscilatorii amortizate

din relația:

$$D = \frac{\ln 2}{N_0}$$

O altă mărime caracteristică oscilațiilor amortizate este ***timpul de viață*** τ, care măsoară intervalul de timp necesar pentru ca amplitudinea să scadă de e = 2,718 ori.

Dacă amplitudinea este mică, $b \ll \omega_0$, unde ω_0 este pulsația în aer, atunci decrementul logaritmic $D \ll 1$ și numărul de oscilații $N_0 \gg 1$, deci în timpul de viață se efectuează un număr mare de oscilații.

Cu același sistem de achiziție computerizată a semnalelor electrice generate de senzorul de forță au fost înregistrate dependențele de timp ale elongației pendulului elastic aflat pe rând în soluții apoase de iaurt. Se poate evidenția trecerea de la regimul aperiodic din mediul vâscos, prin regimul tranzitoriu o dată cu diluarea iaurtului, la regimul fără amortizare al oscilației pendulului în aer.

Observați imaginile din figurile 1.1.3.5 -1.1.3.12!

Ce se întâmplă cu timpul de viață al oscilației atunci când vâscozitatea mediului scade ?

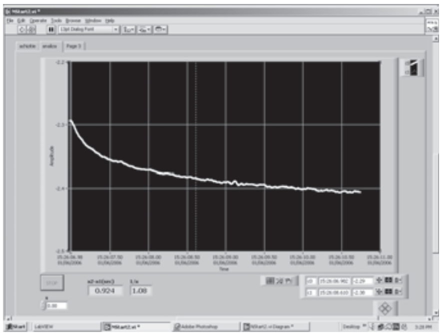


Fig. 1.1.3.5

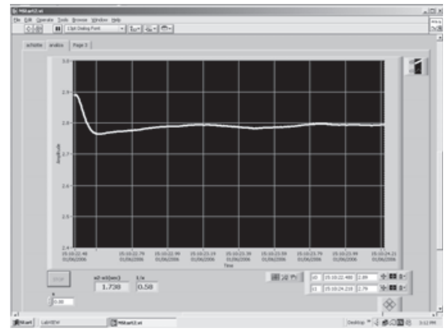


Fig. 1.1.3.6

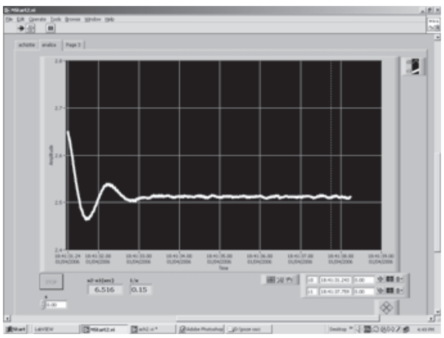


Fig. 1.1.3.7

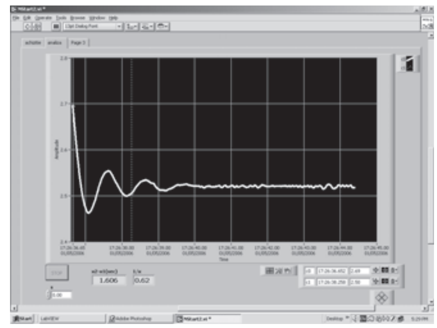


Fig. 1.1.3.8

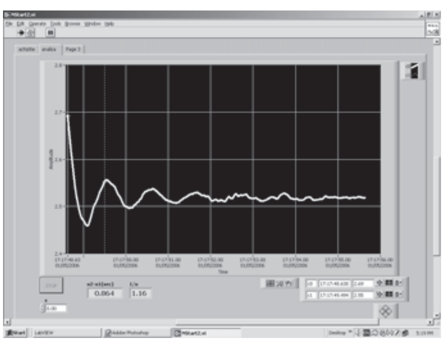


Fig. 1.1.3.9

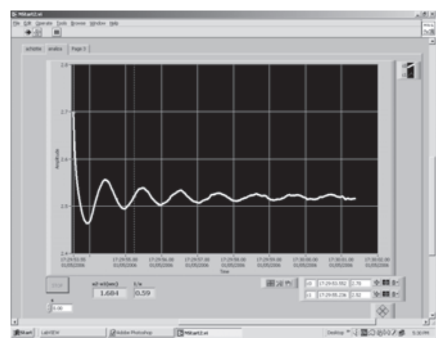


Fig. 1.1.3.10

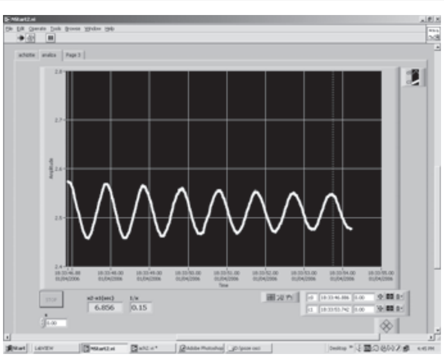


Fig. 1.1.3.11

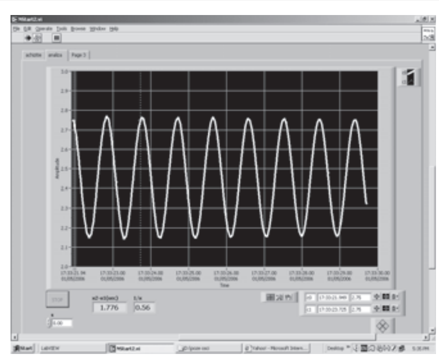


Fig. 1.1.3.12

LUCRARE DE LABORATOR
Studiul amortizării oscilațiilor mecanice

Veți studia oscilațiile unui pendul elastic cu masa cunoscută, în medii precum aerul și apa. Veți calcula perioada sa de oscilație în aer T, și respectiv în apă T′, cronometrând 10-20 de oscilații și utilizând relația:

$$T = \frac{\Delta t}{N}$$

Pentru mișcarea sa amortizată în apă veți calcula coeficientul de rezistență la înaintarea prin apă, r, coeficientul de amortizare, b și decrementul logaritmic D. Numărați după câte oscilații complete, N_0, amplitudinea scade la jumătate. Calculați întâi decrementul logaritmic:

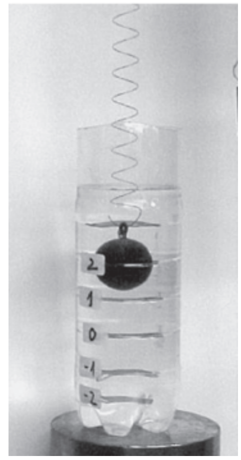
$$D = \frac{\ln 2}{N_0}$$

apoi coeficientul de amortizare și timpul de viață:

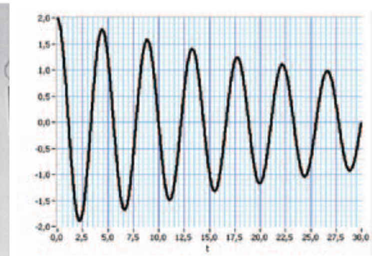
$$b = \frac{D}{T'} \qquad \tau = \frac{1}{b}$$

și coeficientul de rezistență:

$$r = 2 \cdot m \cdot b$$



a



b

Fig. 1.1.3.13
a. Montajul experimental pentru determinarea valorilor amplitudinii de oscilație în apă, a unui pendul elastic
b. Reprezentarea grafică a dependenței de timp a amplitudinii

Nr. oscilației	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Amplitudinea							

Materiale necesare sunt: pendulul elastic (figura 1.1.3.13), un stativ cu suport, un vas transparent cu apă și un cronometru. Alegeți un resort și un corp suficient de greu pentru a vă asigura că în apă veți obține cel puțin 6-7 oscilații complete. Deviați pendulul din poziția verticală de echilibru astfel încât să aibă o amplitudine pe care să o puteți ușor înregistra. Notați valorile descrescătoare ale amplitudinii într-un tabel de forma alăturată. Având în vedere că mișcarea se repetă periodic și simetric, încercați reprezentarea grafică a dependenței de timp a elongației pendulului elastic. Dacă aveți posibilitatea, utilizați o foaie de calcul tabelar (Excel) pentru a realiza tabelul de date experimentale și pentru a realiza reprezentarea grafică.

Experiment virtual: la adresa: http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/damped/d.htm puteți investiga efectul forțelor de rezistență la înaintare în cazul unui pendul elastic virtual. Modificați valorile parametrilor pentru a ilustra regimurile de oscilație ale pendulului!

1.1.4. Modelul oscilatorului liniar armonic

Cel mai simplu exemplu de mișcare oscilatorie este mișcare unui punct material de masă *m* sub acțiunea unei forțe de revenire elastice (figura 1.1.4.1).

Definiție: Se numește ***oscilator liniar armonic*** un punct material care se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe de forma $F = -k \cdot y$ (sau $F = -k \cdot x$).

Observație: Oscilatorul armonic liniar este un *model teoretic ideal* pentru oscilatoarele reale. Mișcarea sa de oscilație este numită ***mișcare oscilatorie armonică***.

Din ecuația principiului al II-lea al mecanicii, $F = -k \cdot y = m \cdot a$, rezultă că $a = -\frac{k}{m} \cdot y$.

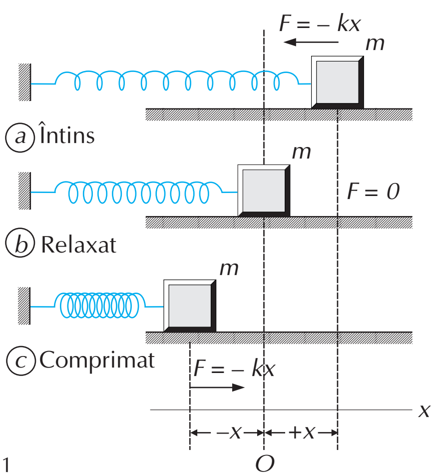


Fig. 1.1.4.1

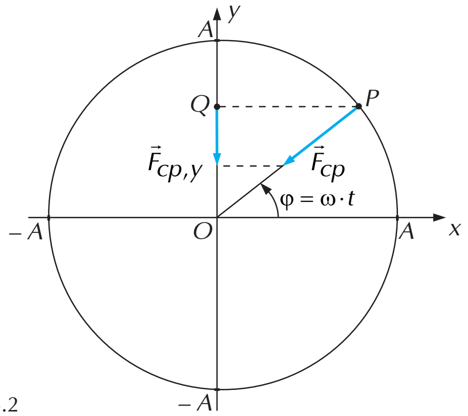


Fig. 1.1.4.2

Deci: ***mişcarea oscilatorie armonică este o mişcare cu acceleraţie variabilă****, proporţională cu elongaţia şi de sens opus acesteia.*

Considerăm un punct material *P*, în mişcare circulară uniformă, cu viteza unghiulară ω, pe un cerc de rază *A* (figura 1.1.4.2).

Acceleraţia punctului *P* va fi:

$$\vec{a}_{cp} = -\omega^2 \cdot \vec{A}$$

Proiecţia punctului *P* pe axa *Oy* (punctul *Q*), va executa o mişcare cu acceleraţie egală cu proiecţia acceleraţiei centripete pe axă, adică:

$$a_{cp} = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin\varphi = -\omega^2 \cdot y \ .$$

Pentru a urmări mişcarea punctului *Q* cu ajutorul unui punct material de masă *m*, asupra acestuia trebuie să acţioneze o forţă:

$$F = m \cdot a_{cp,y} = -m \cdot \omega^2 \cdot y$$

Se constată că proiecţia unui punct aflat în mişcare circulară uniformă pe un diametru al cercului traiectorie efectuează o mişcare oscilatorie liniar armonică sub acţiunea unei forţe *F* de tip elastic. Comparând această relaţie cu relaţia de definiţie rezultă:

$$\boxed{k = m \cdot \omega^2 \, .}$$

Deoarece $\omega = 2\pi \cdot \nu = \dfrac{2\pi}{T}$, rezultă că perioada oscilatorului armonic liniar este dată de relaţia:

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \, .}$$

Pendulul gravitaţional

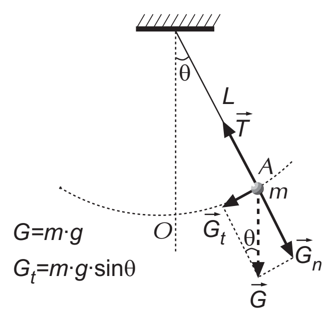


Fig. 1.1.4.3

Pendulul gravitaţional este format dintr-un punct material de masă *m* suspendat de un fir inextensibil de masă neglijabilă şi de lungime *L* (figura 1.1.4.3). Dacă pendulul este deplasat din poziţia sa verticală de echilibru şi este lăsat liber, el oscilează în plan vertical sub acţiunea forţei de greutate. Traiectoria descrisă de punctul material este un arc de cerc. În figura 1.1.4.3 s-au reprezentat şi forţele care acţionează asupra punctului material. Forţa de revenire, care tinde să readucă pendulul în poziţia de echilibru este

$$F = G_t = m \cdot g \cdot \sin\theta \ .$$

Forţa de revenire nu este proporţională cu θ, ci cu sinθ şi, de aceea, *mişcarea pendulului gravitaţional nu este o mişcare armonică*.

Pentru unghiuri mici, dacă θ este exprimat în radiani, se poate arăta că

$$\sin\theta \cong \theta \ .$$

De exemplu, pentru θ = 0,1 rad (aproximativ θ = 5,73°), sinθ = 0,0998. Diferenţa este de 2‰. Pentru unghiuri mai mici de 6° diferenţa între θ şi sinθ este suficient de mică pentru a fi neglijată. Folosind aproximaţia discutată expresia forţei de revenire devine: $F = -m \cdot g \cdot \theta$, unde s-a folosit şi următoarea convenţie.

Convenţie: Pentru poziţiile pendulului situate la dreapta poziţiei de echilibru unghiul θ este considerat pozitiv, iar pentru poziţiile situate la stânga poziţiei de echilibru unghiul θ este considerat negativ.

Deoarece unghiul θ este exprimat în radiani,

$$\theta = \frac{x}{L} \, ,$$

unde x este lungimea corzii care subîntinde arcul de cerc cuprins între poziția de echilibru, O, și poziția, A, ocupată de punctul material. Atunci expresia forței de revenire ia forma

$$F = -\frac{m \cdot g}{L} \cdot x \equiv -k \cdot x,$$

ceea ce arată că, ***pentru oscilații de mică amplitudine*** (unghiuri $\theta < 6^o$) ***forța de revenire este de tip elastic și mișcarea pendulului este o mișcare oscilatorie armonică***.

Perioada T de oscilație a pendulului este dată de relația

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

1

Folosind aici relația $k = (m \cdot g)/L$, se obține pentru perioada de oscilație a pendulului gravitațional expresia

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}},$$

unde:

– L este lungimea pendulului, $[L]_{SI}$ = m;
– g este accelerația gravitațională, $[g]_{SI}$ = m/s^2.

Observații:

1) Această expresie a perioadei pendulului gravitațional este adevărată în cazul micilor oscilații, adică atunci când firul pendulului se abate de la verticală cu un unghi mai mic de 6°.
2) Perioada pendulului gravitațional este independentă de masa sa.
3) Deoarece perioada pendulului gravitațional nu depinde nici de amplitudinea oscilațiilor, pendulul poate fi folosit la măsurarea timpului.
4) Deoarece L și T pot fi ușor și precis măsurate, pendulul gravitațional poate fi folosit la determinarea valorii accelerației gravitaționale g.

Experiment virtual: la adresa http://www.walter-fendt.de/ph14ro/pendulum_ro.htm puteți investiga mișcarea oscilatorie a unui pendul gravitațional virtual. Modificați valorile parametrilor și vizualizați dependențele de timp ale elongației, ale vitezei, ale accelerației, ale forței de revenire a pendulului în poziția de echilibru și respectiv a energiei acestuia!

LUCRARE DE LABORATOR
Studiul experimental al unor oscilatori mecanici simpli

Pendulul gravitațional

Veți determina perioada de oscilație a unui pendul bifilar (figura 1.1.4.4) utilizând relația:

$$T = \frac{\Delta t}{N}$$

Pentru aceasta veți cronometra intervalul de timp Δt necesar efectuării unui număr N de oscilații complete. Pendulul gravitațional oscilează în condiții de izocronism (amplitudine unghiulară mică) cu perioada:

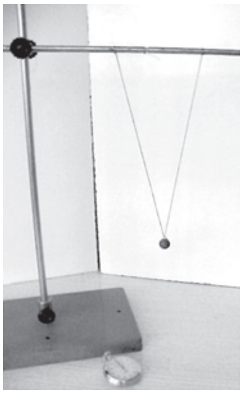


Fig. 1.1.4.4 – Montaj experimental – pendul bifilar

Dacă în această relație se cunosc valorile determinate ale perioadei de oscilație T și respectiv ale lungimii firului, l, atunci se poate calcula valoarea accelerației gravitaționale a locului:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Materiale necesare sunt: pendulul bifilar, un stativ cu suport și un cronometru.

Deviați pendulul din poziția verticală de echilibru astfel încât să nu aibă amplitudine unghiulară mai mare de 10-15°. Din punct de vedere strict matematic ar trebui să ne limităm la 5° pentru a fi valabilă aproximația unghiurilor mici, dar extinderea propusă până la 15° nu afectează considerabil rezultatul obținut și ușurează numărarea oscilațiilor complete ale pendulului.

Cronometrați de fiecare dată un număr de 10-20 de oscilații complete.Introduceți datele într-un tabel de forma indicată în continuare, calculați valoarea medie a perioadei pendulului, erorile absolută și relativă înregistrate. Calculați apoi valoarea accelerației gravitaționale a locului unde a oscilat pendulul.

l(m)	Δt (s)	N	T(s)	T_{med}(s)	g(m/s^2)	g_{med}(m/s^2)

Reluați experimentul pentru diferite lungimi ale firului și calculați valorile obținute pentru perioadele de oscilație. Reprezentați grafic perioada T ca funcție de $\sqrt{l}$ și calculați panta dreptei obținute (p= tg α). Calculați apoi valoarea accelerației gravitaționale din relația:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{p^2}$$

Comparați rezultatele obținute!

Dacă aveți posibilitatea, utilizați o foaie de calcul tabelar (Excel) pentru a realiza tabelul de date experimentale.

Pendulul elastic

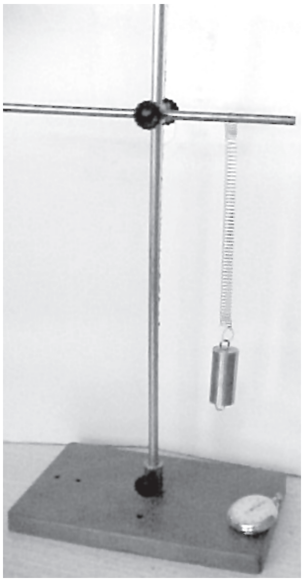


Fig. 1.1.4.5 – Montaj experimental – pendul elastic

Veți determina constanta elastică a unui resort prin metoda dinamică, apoi veți verifica experimental formula de calcul a constantei elastice a resorturilor cuplate serie sau paralel. Pendulul elastic oscilează în plan vertical (figura 1.1.4.5) cu o perioadă:

$$T = \frac{\Delta t}{N} \qquad (1)$$

unde Δt este timpul necesar efectuării unui număr N de oscilații complete.

Perioada se poate calcula și din relația:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (2)$$

unde m este masa corpului și k constanta elastică a resortului.

Determinând perioada pendulului cu prima relație veți putea calcula constanta elastică a resortului din relația:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \qquad (3)$$

Pentru cuplajele de resorturi identice veți calcula perioadele de oscilație cu relațiile (1) și (2). În relația (2) se va utiliza pentru cuplaj serie constanta:

$$k_s = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2};\ k_s = \frac{k}{2}, \text{ pentru resorturi identice}$$

$$k_p = k_1 + k_2;\ k_p = 2 \cdot k, \text{ pentru resorturi identice} \qquad (4)$$

Materialele necesare sunt: un postament cu tijă și mufe, două resorturi identice, un corp metalic cu cârlig, un cronometru și o bară metalică etalonată (pârghie din trusă).Realizați montajele experimentale din figurile 1.1.4.5.-1.1.4.7, scoateți corpul de masă m din poziția de echilibru și cronometrați un anumit număr de oscilații.

Înregistrați datele în tabel și calculați perioada de oscilație în cele trei cazuri cu formula (1).

Aplicați formula (3) pentru calculul constantei elastice în versiunea experimentală k_{exp}.

Aplicați relațiile (4) pentru calculul teoretic al acelorași constante elastice k_{teor} și comparați rezultatele obținute.

Efectuați 10-12 măsurători pentru fiecare caz.

Cuplajul	**N**	**Δt(s)**	**T(s)**	**k_{exp}(N/m)**	**k_{teor}(N/m)**

Identificați sursele de erori și propuneți soluții pentru micșorarea lor.

Dacă aveți posibilitatea, utilizați o foaie de calcul tabelar (Excel) pentru a realiza tabelul de date experimentale.

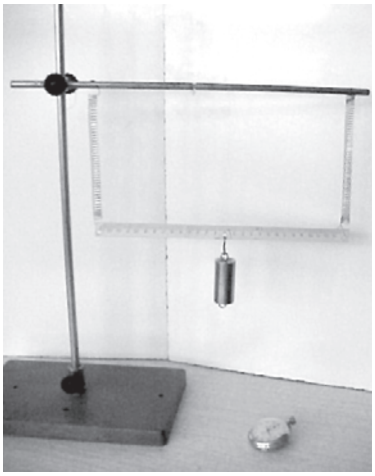


Fig. 1.1.4.6 – Montaj experimental – pendul elastic cu resorturi cuplate în paralel

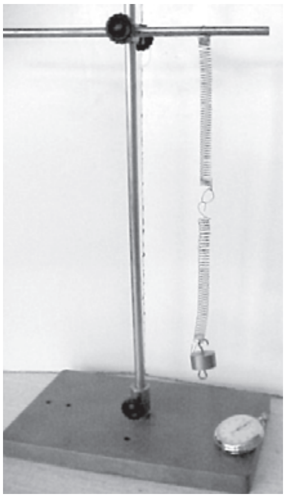


Fig. 1.1.4.7 – Montaj experimental – pendul elastic cu resorturi cuplate în serie

1

Ecuațiile mișcării oscilatorului liniar armonic

Considerăm din nou punctul material P în mișcare circulară uniformă, cu viteza unghiulară ω, pe un cerc de rază A, sub acțiunea forței centripete:

$$\vec{F}_{cp} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{A}\ .$$

Presupunem că la momentul inițial punctul material se află în poziția P_0 (figura 1.1.4.8), vectorul său de poziție față de centrul cercului traiectorie făcând unghiul φ_0 cu axa Ox. La momentul t punctul se află în poziția P, vectorul său de poziție făcând unghiul $\omega \cdot t + \varphi_0$ cu axa Ox. Corespunzător, proiecția sa pe axa Oy este dată de relația:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)\ ,$$

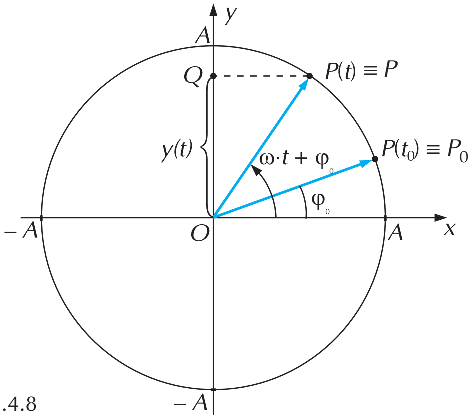


Fig. 1.1.4.8

unde:

- $y(t)$ este elongația mișcării oscilatorii a proiecției Q la momentul t, $[y]_{SI} = 1$ m;
- A este amplitudinea mișcării oscilatorii, $[A]_{SI} = 1$ m;
- $\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0$ este ***faza*** mișcării oscilatorii (la momentul t), $[\varphi]_{SI} = 1$ rad;
- ω este ***pulsația*** mișcării oscilatorii; ea reprezintă viteza de variație a fazei, $[\omega]_{SI} = 1$ rad/s;
- φ_0 este faza inițială a mișcării oscilatorii, $\varphi_0 = \varphi(t = 0)$.

Aceasta este ***legea de mișcare*** a oscilatorului liniar armonic.

Observație: Această asociere a mișcării oscilatorii armonice a punctului Q cu mișcarea circulară uniformă a punctului P a permis fizicianului francez Augustin Fresnel să introducă ***reprezentarea fazorială*** a mărimilor care variază după o lege sinusoidală ca cea de mai sus. ***Fazorul*** este un vector care are modulul egal cu amplitudinea A a oscilației și care se rotește în jurul originii sistemului de coordonate cu o viteză unghiulară egală cu pulsația ω a mișcării oscilatorii. Este vectorul $\overrightarrow{OP}$ din figura 1.1.4.8.

Din *legea de mișcare* a oscilatorului liniar armonic, folosind relația $a = -\omega^2 \cdot y$, se deduce ușor ***legea accelerației***:

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

unde:

- $a(t)$ este accelerația mișcării oscilatorii la momentul t, $[a]_{SI} = 1$ m/s^2;
- $a_M = A \cdot \omega^2$ este accelerația maximă a mișcării oscilatorii.

Folosind legea de mișcare în relația de definiție a vitezei:

$$v = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \quad \text{pentru } \Delta t \text{ foarte mic},$$

se poate obține și ***legea vitezei*** oscilatorului liniar armonic:

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

unde:

- $v(t)$ este viteza mișcării oscilatorii la momentul t, $[v]_{SI}$ = m/s;
- $v_M = A \cdot \omega$ este viteza maximă a mișcării oscilatorii.

Exercițiul 1.1.4.1. Deduceți legea vitezei oscilatorului liniar armonic utilizând metoda prezentată anterior.

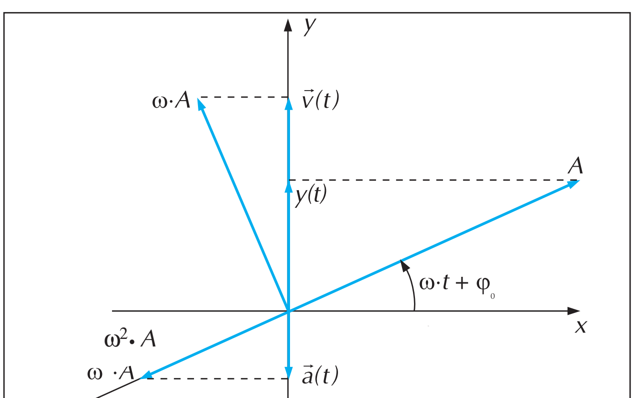


Fig. 1.1.4.9 – Reprezentare fazorială pentru viteza și accelerația oscilatorului liniar armonic

Puteți observa că legea vitezei și cea a accelerației pot fi scrise și în forma:

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a(t) = A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0 + \pi).$$

Din figura 1.1.4.9 puteți observa că viteza este defazată *înainte* cu $\pi/2$ față de elongație, iar accelerația este și ea defazată *înainte* cu π față de elongație.

În figura 1.1.4.10 sunt reprezentate grafic dependențele de timp ale elongației $y(t)$, vitezei $v(t)$ și accelerației $a(t)$ pentru mișcarea oscilatorie a unui punct material având faza inițială $\varphi_0 = 0$.

Exercițiul 1.1.4.2. Un corp având masa de 0,5 kg, legat de un perete vertical printr-un resort elastic de constantă de elasticitate k = 8 N/m, se poate deplasa fără frecare pe un plan orizontal. La momentul inițial, t_0 = 0, corpul se află la o distanță y_0 = 10 cm de poziția de echilibru și este lăsat liber. Aflați: a) ecuația mișcării oscilatorii a corpului; b) viteza maximă v_M.

Soluție: Scriem legea de mișcare și legea vitezei

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$
$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

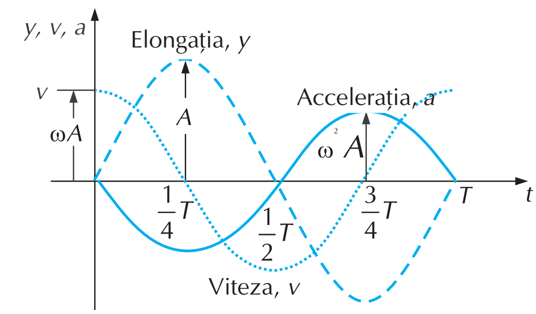


Fig. 1.1.4.10 – Dependența elongației y, a vitezei v și a accelerației a ale unui punct materiale aflat în mișcare oscilatorie armonică

Conform enunțului problemei, condițiile inițiale ale mișcării sunt

$$y(0) = y_0, \qquad v(0) = 0.$$

Folosind cele două ecuații în aceste condiții rezultă că $A \cdot \sin\varphi_0 = y_0$, $\cos\varphi_0 = 0$.

De aici se găsește că $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $A = y_0$.

Ecuația mișcării ia atunci forma $y(t) = y_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \dfrac{\pi}{2}\right) = y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = y_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}} \cdot t\right)$.

Folosind aici valorile numerice se obține în final expresia $y(t) = 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot \cos(4 \cdot t)$.

Pentru viteza maximă se găsește că $v_M = A \cdot \omega = y_0 \cdot \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 0{,}4$ m/s.

Exercițiul 1.1.4.3. Reprezentați grafic ecuația mișcării oscilatorii obținută la exercițiul 1.1.4.2. Scrieți ecuația unei mișcări oscilatorii defazate cu $\pi/3$ în urma oscilației precedente. Reprezentați grafic ecuația obținută.

Exercițiul 1.1.4.4. Un corp oscilează vertical fiind suspendat de două resorturi ideale identice, având fiecare constanta de elasticitate k, legate mai întâi în serie și, apoi, în paralel. Aflați raportul r al lungimilor celor două pendule matematice care oscilează sincron cu corpul în cele două situații.

Soluție: Când resorturile sunt legate în serie, constanta de elasticitate echivalentă k_s este dată de relația:

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k}$$

deci $k_s = k/2$, iar când sunt legate în paralel, constanta de elasticitate echivalentă k_p este: $k_p = k_1 + k_2 = 2 \cdot k$.

În primul caz, perioada oscilațiilor este: $T_s = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_s}}$,

Perioada pendulului matematic care oscilează sincron cu corpul este: $T_s = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_s}{g}}$.

Din aceste două relații rezultă că: $L_s = \dfrac{m \cdot g}{k_s}$.

În mod analog, pentru cazul în care resorturile sunt legate în paralel, se obține: $L_p = \dfrac{m \cdot g}{k_p}$.

Raportul r cerut este atunci dat de relația: $r \equiv \dfrac{L_s}{L_p} = \dfrac{k_p}{k_s} = \dfrac{2k}{\frac{k}{2}} = 4$.

Energia oscilatorului armonic

Energia mecanică a oscilatorului armonic liniar se poate calcula pornind de la relația

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 .$$

Folosind aici ecuația vitezei și legea de mișcare rezultă că

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

De aici, folosind relația $k = m \cdot \omega^2$, rezultă în final că energia oscilatorului armonic liniar este dată de relația

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot A^2 = 2\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot A^2 \cdot m .$$

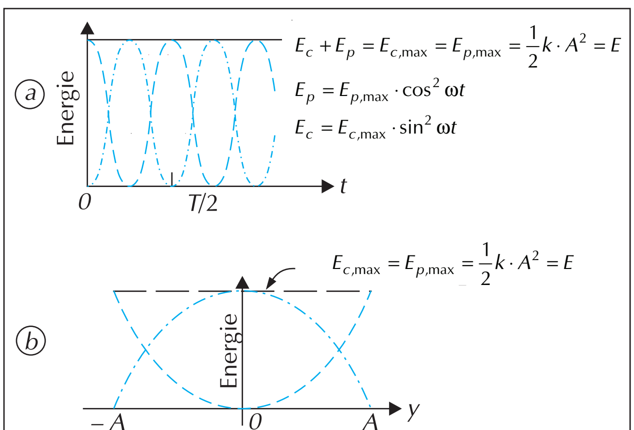


Fig. 1.1.4.11

Această expresie arată că ***energia oscilatorului armonic liniar este constantă în timp*** deși energiile – cinetică și potențială – variază ca în figura 1.1.4.11-a.

În figura 1.1.4.11-b sunt reprezentate energia cinetică, energia potențială și energia totală în funcție de elongația y. Din acest al doilea grafic se desprind două concluzii importante.

Mai întâi, se vede explicit că mișcarea este limitată la segmentul $(-A, +A)$: în caz contrar energia potențială ar depăși valoarea energiei totale, ceea ce este imposibil. De aceea se spune că mișcarea oscilatorului are loc într-o ***groapă de energie potențială***, cu referință la forma curbei care reprezintă grafic E_p.

În al doilea rând, se constată că în timpul mișcării oscilatorii are loc un schimb permanent de energie. Considerând modelul corp de masă m plus resort (figura 1.1.4.1) vedem că energia cinetică a corpului de masă m se transformă în energie potențială a resortului elastic atunci când corpul se mișcă de la poziția de echilibru spre poziția de maximă deformare a resortului. Când corpul se mișcă în sens invers are loc transferul invers de energie: energia potențială elastică a resortului scade și se transformă în energie cinetică a corpului de masă m. Un astfel de sistem este numit ***sistem mecanic oscilant***: energia „oscilează” între cei doi acumulatori de energie, resortul și respectiv, corpul de masă m.

Exercițiul 1.1.4.5. Un corp de masă m = 200 g execută oscilații armonice. Valoarea extremă a forței elastice care acționează asupra corpului este F = 200 N. Energia totală a oscilatorului este E = 40 J. Considerați ca origine a timpului momentul în care corpul trece prin poziția de echilibru în sensul pozitiv al axei alese. Scrieți ecuația de mișcare a corpului.

Soluție: Conform enunțului problemei φ_0 = 0, deci ecuația de mișcare este de forma $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Deoarece $F = k \cdot A$ și $E = k \cdot A^2 / 2$ rezultă că $A = \dfrac{2 \cdot E}{F}$.

Pe de altă parte, $k = \dfrac{F}{A} = \dfrac{F^2}{2 \cdot E}$, deci $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{F^2}{2 \cdot m \cdot E}} = \dfrac{F}{\sqrt{2 \cdot m \cdot E}}$.

Atunci se obține: $$y(t)=\frac{2\cdot E}{F}\cdot\sin\left(\frac{F\cdot t}{\sqrt{2\cdot m\cdot E}}\right)=0{,}4\ \mathrm{m}\cdot\sin(50\cdot t)\qquad (\mathrm{m}).$$

Exercițiul 1.1.4.6. Să se afle elongația y a unui oscilator armonic în momentul în care energia sa cinetică este egală cu cea potențială. Amplitudinea oscilațiilor este A = 14,14 cm.

Soluție: Energia totală a oscilatorului este $E=E_c+E_p=\frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2$.

Condiția din problemă este $E_c=E_p=\frac{1}{2}\cdot k\cdot y^2$. Înlocuind aceste expresii în relația precedeentă rezultă că $2\cdot\frac{1}{2}\cdot k\cdot y^2=\frac{1}{2}\cdot k\cdot A^2\Rightarrow y=\pm\frac{A}{\sqrt{2}}$. Corespunzător, numeric se obține $y=\pm 10\ \mathrm{cm}$.

Experiment virtual: la adresa: http://www.walter-fendt.de/ph14ro/resonance_ro.htm puteți investiga mișcarea oscilatorie a unui pendul elastic virtual. Modificați valorile parametrilor și vizualizați dependențele de timp ale elongației, ale vitezei, ale accelerației, ale forței de revenire a pendulului în poziția de echilibru și respectiv a energiei acestuia!

1.1.5. Compunerea oscilațiilor paralele. *Compunerea oscilațiilor perpendiculare**

Considerăm cazul în care punctul material execută simultan două oscilații având aceeași direcție și aceeași pulsație ω, dar amplitudini și faze inițiale diferite:

$$y_1(t)=A_1\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_{01});$$
$$y_2(t)=A_2\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_{02}).$$

Mișcarea rezultantă va fi dată de relația:

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t).$$

Folosim cele două expresii precedente în această relație și obținem:

$$\begin{aligned}y(t)&=A_1\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_{01})+A_2\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_{02})=\\&=A_1\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\cos\varphi_{01}+A_1\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\sin\varphi_{01}+A_2\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\cos\varphi_{02}+A_2\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\sin\varphi_{02}=\\&=(A_1\cdot\cos\varphi_{01}+A_2\cdot\cos\varphi_{02})\cdot\sin(\omega\cdot t)+(A_1\cdot\sin\varphi_{01}+A_2\cdot\sin\varphi_{02})\cdot\cos(\omega\cdot t)=\\&=(A_1\cdot\cos\varphi_{01}+A_2\cdot\cos\varphi_{02})\cdot\left[\sin(\omega\cdot t)+\frac{A_1\cdot\sin\varphi_{01}+A_2\cdot\sin\varphi_{02}}{A_1\cdot\cos\varphi_{01}+A_2\cdot\cos\varphi_{02}}\cdot\cos(\omega\cdot t)\right].\end{aligned}$$

Notăm: $$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1\cdot\sin\varphi_{01}+A_2\cdot\sin\varphi_{02}}{A_1\cdot\cos\varphi_{01}+A_2\cdot\cos\varphi_{02}}.$$

Atunci relația precedentă poate fi rescrisă în forma:

$$\begin{aligned}y(t)&=(A_1\cdot\cos\varphi_{01}+A_2\cdot\cos\varphi_{02})\cdot\left[\sin(\omega\cdot t)+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\cos(\omega\cdot t)\right]=\\&=\frac{A_1\cdot\cos\varphi_{01}+A_2\cdot\cos\varphi_{02}}{\cos\varphi}\cdot[\sin(\omega\cdot t)\cdot\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\cos(\omega\cdot t)]=\\&=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi),\end{aligned}$$

unde s-a notat: $$A=\frac{A_1\cdot\cos\varphi_{01}+A_2\cdot\cos\varphi_{02}}{\cos\varphi}.$$

Observăm că *mișcarea rezultantă este tot o oscilație armonică,* având aceeași direcție și aceeași pulsație ω, dar având faza inițială φ definită mai sus și având amplitudinea:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2\cdot A_1\cdot A_2\cdot\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})}\,.$$

Expresia amplitudinii A se obține calculând $\cos\varphi$ din expresia lui $\mathrm{tg}\varphi$ și înlocuind rezultatul în definiția lui A.

Observații:

1) dacă $\Delta\varphi\equiv\varphi_{02}-\varphi_{01}=2k\cdot\pi,\ (k=0,1,2,\ldots)$, $\cos\Delta\varphi=\cos(2k\cdot\pi)=+1$ și obținem:

$$A=A_1+A_2\,.$$

Concluzie: Dacă $\Delta\varphi\equiv\varphi_{02}-\varphi_{01}=2k\cdot\pi,\ (k=0,1,2,\ldots)$, amplitudinea oscilației rezultante este egală cu suma amplitudinilor A_1 și A_2 ale oscilațiilor componente. Se spune că oscilațiile ***sunt în fază***.

2) dacă $\Delta\varphi\equiv\varphi_{02}-\varphi_{10}=(2\,k+1)\cdot\pi,\ (k=0,1,2,\ldots)$, $\cos\Delta\varphi=\cos 2(k+1)\cdot\pi=-1$ și obținem $A=|A_2-A_1|$.

Concluzie: Dacă $\Delta\varphi\equiv\varphi_{02}-\varphi_{01}=(2k+1)\cdot\pi,\ (k=0,1,2,\ldots)$, amplitudinea oscilației rezultante este egală cu valoarea absolută a diferenței amplitudinilor, A_2 și A_1, ale oscilațiilor componente. Se spune că oscilațiile ***sunt în opoziție de fază***.

Metoda fazorială

Considerăm cazul în care punctul material execută simultan două mișcări oscilatorii pe aceeași direcție și cu aceeași pulsație ω, dar având amplitudini și faze inițiale diferite

$$y_1(t)=A_1\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_{01}),\qquad y_2(t)=A_2\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_{02})\,.$$

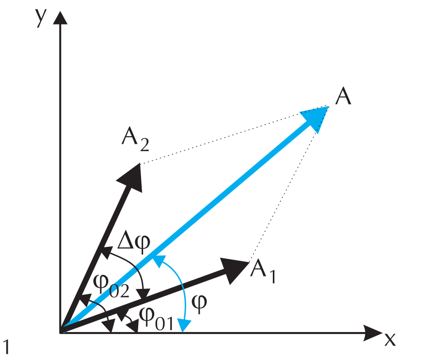


Fig. 1.1.5.1

Reprezentăm aceste oscilații cu ajutorul fazorilor $\vec{A}_1$ și $\vec{A}_2$ (figura 1.1.5.1). Acești vectori se află inițial în pozițiile din figura 1.1.5.1, fazele inițiale fiind unghiurile pe care ei le fac cu axa *Ox*. Modulele acestor vectori sunt amplitudinile de oscilație ale celor două mișcări oscilatorii. La momentul inițial cei doi fazori încep să se rotească în sens trigonometric cu viteza unghiulară w. Proiecțiile lor pe axa *Oy* depind de timp conform celor două relații de mai sus.

Mișcarea rezultantă va fi dată de relația: $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$.

Așa cum se vede din figură *y(t)* este proiecția pe axa *Oy* a fazorului:

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2.$$

Acest fazor se rotește odată cu fazorii componenți cu aceeași viteză unghiulară ω, și reprezintă mișcarea oscilatorie rezultantă:

$$y(t)=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)\ .$$

Conform regulii paralelogramului, modulul fazorului rezultant, care dă amplitudinea mișcării de oscilație rezultantă, este dat de relația:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2\cdot A_1\cdot A_2\cdot\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})}\,.$$

Faza inițială a mișcării rezultante este dată de unghiul φ_0 pe care îl face inițial fazorul rezultant $\vec{A}$ cu axa *Ox*. Așa cum se vede din figură:

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{A_1\cdot\sin\varphi_{01}+A_2\cdot\sin\varphi_{02}}{A_1\cdot\cos\varphi_{01}+A_2\cdot\cos\varphi_{02}}\ .$$

Astfel, compunând fazorial oscilațiile armonice paralele, se regăsesc rezultatele obținute prin metoda analitică.

Fenomenul intitulat „bătăi” se produce atunci când un punct material este supus simultan la două oscilații paralele de frecvențe puțin diferite. Mișcarea lui nu mai este o oscilație armonică, amplitudinea rezultantă este variabilă (figura 1.1.5.2).

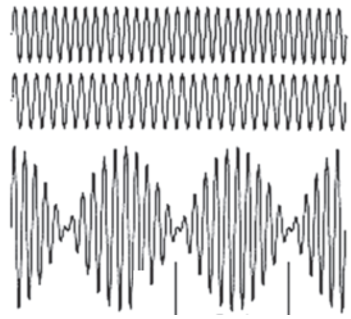


Fig. 1.1.5.2 – Bătăi

Exercițiul 1.1.5.1. Un corp este supus simultan la două mișcări oscilatorii armonice paralele: $y_1(t) = 4 \cdot \sin 2\pi(t + 1/3)$ (cm) și $y_2(t) = 3 \cdot \sin 2\pi(t + 1/4)$ (cm). Aflați ecuația mișcării oscilatorii rezultante.

Soluție: Ecuațiile celor două mișcări oscilatorii sunt:

$$y_1(t) = 4 \cdot \sin\left(2\pi \cdot t + \frac{2\pi}{3}\right) \equiv a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$y_2(t) = 3 \cdot \sin\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \equiv a_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Oscilația rezultantă are ecuația: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.
Amplitudinea A a mișcării oscilatorii rezultante este dată de relația:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cdot a_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 6{,}76 \text{ cm},$$

iar faza inițială, φ, se obține din relația: $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{a_1 \cdot \sin\varphi_1 + a_2 \cdot \sin\varphi_2}{a_1 \cdot \cos\varphi_1 + a_2 \cdot \cos\varphi_2} = -3{,}23.$

Deci $\varphi = -\,\mathrm{arctg}\ 3{,}23$.
Ecuația mișcării oscilatorii rezultante este, deci, următoarea: $y(t) = 6{,}76 \cdot \sin(2\pi \cdot t - \mathrm{arctg}\ 3{,}23)$ (cm).

*Compunerea oscilațiilor perpendiculare de aceeași frecvență**

Un punct material *P*, este supus simultan acțiunii a două oscilații perpendiculare cu aceeași frecvență, ca în figura 1.1.5.3:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$
$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (2)$$

Punctul material va descrie o traiectorie ale cărei ecuații parametrice sunt ecuațiile (1) și (2). Vom elimina timpul între ecuațiile:

$$\frac{x}{A_1} = \sin\omega t \cdot \cos\varphi_1 + \cos\omega t \cdot \sin\varphi_1 \ \Big| \cdot \cos\varphi_2$$

$$\frac{y}{A_2} = \sin\omega t \cdot \cos\varphi_2 + \cos\omega t \cdot \sin\varphi_2 \ \Big| \cdot \cos\varphi_1$$

Prin scăderea lor membru cu membru se obține ecuația (3):

$$\frac{x}{A_1} \cdot \cos\varphi_2 - \frac{y}{A_1} \cdot \cos\varphi_1 = -\cos\varphi_t \qquad (3)$$

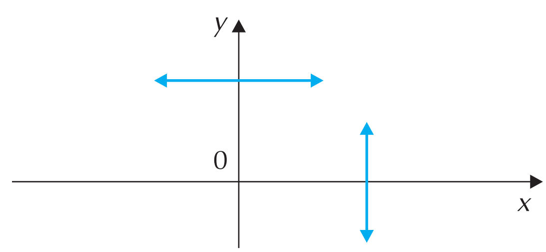


Fig. 1.1.5.3

Procedând analog prin înmulțirea ecuațiilor cu sin φ_2, respectiv sin φ_1 se obține ecuația (4):

$$\frac{x}{A_1}\cdot\sin\varphi_2-\frac{y}{A_2}\cdot\sin\varphi_1=\sin\omega t\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (4)$$

Ecuațiile (3) și (4) vor fi ridicate la pătrat și adunate membru cu membru, rezultând ecuația (5):

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1\cdot A_2}\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (5)$$

Ea reprezintă ecuația unei elipse înscrise în dreptunghiul cu laturile 2 A_1 și respective $2A_2$.
În funcție de valorile diferenței de fază $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, traiectoria mișcării rezultante poate avea diferite forme.

1) $\Delta\varphi = 2\,k\pi$, unde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, ecuația (5) devine:

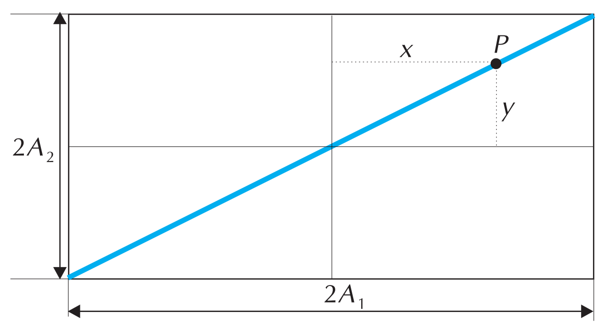


Fig. 1.1.5.4

$$\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}=0,\quad y=\frac{A_2}{A_1}\cdot x$$

deci traiectoria punctului material este o dreaptă care trece prin originea sistemului de axe utilizat, reprezentând diagonala dreptunghiului din figura 1.1.5.4.

Când $k=0$, $\varphi_1=\varphi_2=\varphi$, elongația mișcării oscilatorie rezultante se poate obține din relația:

$$OP=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$$

deci pulsația mișcării oscilatorii a punctului P este identică cu pulsațiile inițiale.

2) $\Delta\varphi = (2\,k + 1)\pi$, unde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, ecuația (5) devine:

$$\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}=0,\quad y=-\frac{A_2}{A_1}\cdot x$$

adică, tot mișcare oscilatorie a punctului P dar pe cealaltă diagonală a dreptunghiului din figura 1.1.5.4.

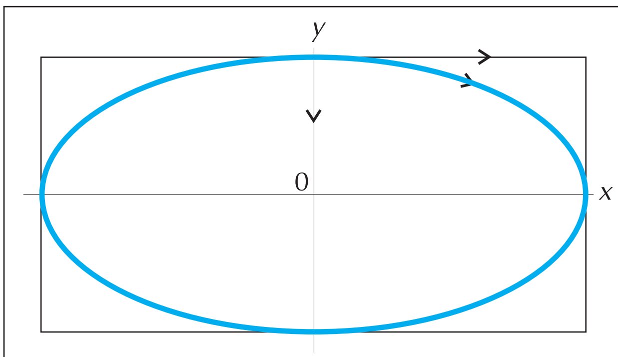


Fig. 1.1.5.5

3) $\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$ mișcările oscilatorii sunt la cvadratură:

$$x=A_1\sin(\omega t+\varphi_1)$$

$$y=A_2\sin\left(\omega t+\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)=A_2+(\cos\omega t+\varphi_1)$$

Acum mișcarea punctului P se va face pe o elipsă (figura 1.1.5.5) de ecuație:

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

Dacă $A_1 = A_2 = A$, elipsa devine cerc:

$$x^2+y^2=A^2$$