PETRE NĂCHILĂ

Analiză matematică pentru toți

Clasa a XII-a

Editura NOMINA

Capitolul 1
PRIMITIVE

1.1. Noţiunea de primitivă. Operaţii cu funcţii care admit primitive

Definiţia 1. Fie intervalul $I \subset \mathbb{R}$ și funcția $f : I \to \mathbb{R}$. Spunem că funcția f *admite primitive* pe I dacă există $F : I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I și $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in I$. Funcția F se numește *primitiva* lui f (sau antiderivata) pe intervalul I (funcția f se numește *primitivabilă*).

Procedeul (operația) prin care se determină primitivele unei funcții se numește *integrare* (sau antiderivare).

Teorema 1. Dacă $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției $f : I \to \mathbb{R}$ (I interval), atunci ele diferă printr-o constantă (adică există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c$, $\forall\ x \in I$).

Notaţii: $\mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$; $\mathscr{C} = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ constantă}\}$.

Pe $\mathcal{F}(I)$ se introduc operațiile de „adunare a funcțiilor” și „înmulțire cu scalari” astfel: fie $f, g \in \mathcal{F}(I)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $f + g : I \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\ x \in I$;
- $\alpha f : I \to \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall\ x \in I$.

Observaţii: 1. $\mathscr{C} \subset \mathcal{F}(I)$;

2. dacă $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(I)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(I)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g : I \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$; $\alpha\mathcal{F} = \{\alpha f : I \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{F}\}$;

3. $\alpha\mathscr{C} = \mathscr{C}$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^*$; **4.** $\mathscr{C} + \mathscr{C} = \mathscr{C}$.

Definiţia 2. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Mulțimea tuturor primitivelor lui f pe intervalul I se numește *integrala nedefinită* a lui f și se notează $\int f(x)dx$. Dacă F este o primitivă a lui f, avem:

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathscr{C}.$$

Observaţie. Definiția primitivei unei funcții poate fi extinsă pe reuniuni finite de intervale distincte. În acest caz, două primitive nu diferă printr-o constantă.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$. Luăm primitivele:

$F_1(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & x < 2 \\ x^2 - 5x + 4, & x > 2 \end{cases}$; $F_2(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 5x + 1, & x > 2 \end{cases}$. Avem $(F_1 - F_2)(x) = \begin{cases} 1, & x < 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$.

e) $\int \sqrt[3]{3x+1}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{3x-3}}\,dx$, $x \in (1, \infty)$;

g) $\int \sqrt[5]{4x^2+4x+1}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$;

h) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}}\,dx$, $x \in (0, \infty)$;

i) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$;

j) $\int \frac{1}{x^4-5x^2+4}\,dx$, $x \in (2, \infty)$.

Soluție. a) $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \operatorname{ctg}^2 x\,dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + \mathscr{C}$;

b) $\int \frac{4\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int 4dx + 2\int \operatorname{tg}^2 x dx = 4x + 2\operatorname{tg} x + \mathscr{C}$;

c) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \mathscr{C}$;

d) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + \mathscr{C}$;

e) $\int (3x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{(3x+1)^{1+\frac{1}{3}}}{3\cdot\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\cdot(3x+1)^{\frac{4}{3}}$; f) $\int (3x-3)^{-\frac{2}{5}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-3)^{-\frac{2}{5}+1}}{\frac{3}{5}} =$

$= 5(3x-3)^{\frac{3}{5}}$; g) $\int (2x+1)^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{14}(2x+1)^{\frac{7}{5}}$; h) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx =$

$= \int \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)dx = \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - \left(\sqrt{x}\right)^3\right)$.

Probleme propuse

A. Determinați următoarele integrale nedefinite:

1. $\int \left(2x^4 - 4x^3 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx$, $x > 0$;

2. $\int \left(6\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}\right)dx$, $x < 0$;

3. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{2}\sqrt{x^3}\right)dx$, $x > 0$;

4. $\int \left(4e^{4x} - 2e^{-2x}\right)dx$, $x \in \mathbb{R}$;

5. $\int (6\operatorname{ctg} 3x - 2\operatorname{tg} 2x)\,dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$;

6. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 4x} - \frac{4}{\sin^2 2x}\right)dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$;

7. $\int \left(\frac{1}{2x-2} - \frac{2}{3x+6}\right)dx$, $x \in (1, \infty)$;

8. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}-2}{x^2-4}\,dx$, $x > 2$;

9. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$, $x \in \mathbb{R}$;

10. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\,dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

Calculul primitivelor unei funcţii f definite pe subintervale

Considerăm $f : I \to \mathbb{R}$ care admite primitive pe intervalul I. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset$ $\subset I$, cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Considerăm intervalele $I_1 = I \cap (-\infty, a_1]$, $I_2 =$ $= (a_1, a_2)$, $\ldots$, $I_n = (a_{n-1}, a_n]$, $I_{n+1} = (a_n, \infty) \cap I$. Funcția f admite primitiva $F_k(x) = F(x) + \mathscr{C}_k$, unde F este primitiva lui f pe I. În orice punct $a \in A$ avem $F(a) =$ $= F(a - 0) = F(a + 0)$. Dacă a este extremitatea „stângă" a lui I, avem $F(a) =$ $= \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} F(x)$. Dacă a este extremitatea „dreaptă" a lui I, avem $F(a) = \lim\limits_{x\searrow a} F(x)$.

Probleme rezolvate

1. Fie funcțiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x + a) f(x)$, $h(x) = x f(x + a)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Demonstrați că, dacă g și h admit primitive pe $\mathbb{R}$, atunci f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Determinați o primitivă a lui f cu ajutorul primitivelor lui g și h.

Soluție: a) Fie G, H primitive pe $\mathbb{R}$ ale lui g, respectiv h. Avem $g(x + a) - h(x) =$ $= (x + 2a) \cdot f(x + a) - x f(x + a) = 2a f(x + a)$ și deci $f(x) = \dfrac{1}{2a}(g(x) - h(x - a))$. O primitivă a funcției $x \to h(x - a)$ este $H(x - a)$. Deci, o primitivă a lui f este $F(x) =$ $= \dfrac{1}{2a}(G(x) - H(x - a))$.

2. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1, & x \le 0 \\ ax + 1, & x \in (0, 1] \\ bx - 2, & x > 1 \end{cases}$ să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: O primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$ are forma $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x + c_1, & x \le 0 \\ \dfrac{ax^2}{2} + x + c_2, & x \in (0, 1] \\ \dfrac{bx^2}{2} - 2x + c_3, & x > 1 \end{cases}$. Din condițiile $F(0) = F(0 - 0) = F(0 + 0)$; $F(1 - 0) = F(1) = F(1 + 0)$ obținem $c_1 = c_2$, $\dfrac{a}{2} + 1 + c_2 =$ $= \dfrac{b}{2} - 2 + c_3$. Deoarece F este derivabilă în 0 și 1, avem $F_s'(0) = F_d'(0)$; $F_s'(1) = F_d'(1)$, adică $\lim\limits_{x\nearrow 0}(3x^2 - 2x + 1) = \lim\limits_{x\searrow 0}(ax + 1)$; $\lim\limits_{x\nearrow 1}(ax + 1) = \lim\limits_{x\searrow 1}(bx - 2)$ $\Leftrightarrow$ $b = a + 3$, $a \in \mathbb{R}$.

1.4. Integrarea prin părţi

Teoremă. Dacă funcțiile f, $g : I \to \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile cu derivatele funcții continue pe intervalul I, atunci funcțiile $fg, f'g$ și fg' admite primitive pe I și avem:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Probleme rezolvate

1. Determinați următoarele integrale definite:

a) $\int (\sin x)\ln(\cos x)\,dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; b) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx,\ x > 1$;

c) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,\ x \in (-a, a),\ a > 0$; d) $\int \sqrt{x^2 + a}\,dx$, I interval, cu $x^2 + a > 0$.

Soluție. a) $\int (\sin x)\ln(\cos x)\,dx = \int (-\cos x)'\ln(\cos x)\,dx = (-\cos x)'\ln(\cos x) +$ $+ \int (\cos x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}dx = (-\cos x)\ln(\cos x) - \int \sin x\,dx = (-\cos x)\ln(\cos x) + \cos x + \mathscr{C}$;

b) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \int (\ln(\ln x))\cdot(\ln x)'\,dx = (\ln x)\ln(\ln x) - \int (\ln x)\frac{1}{x\ln x}dx = (\ln\ x)\ln(\ln\ x) -$ $- \ln x + \mathscr{C}$; c) $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$. Cum

$J = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = -\int x\cdot\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)'dx = -x\sqrt{a^2 - x^2} + I$, iar $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}$,

rezultă că $I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + \mathscr{C}$; d) $I = \int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \int \frac{x^2 + a}{\sqrt{x^2 + a}}dx =$

$= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}}dx + a\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}dx$. Avem $J = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}}dx = \int \left(x\sqrt{x^2 + a}\right)'dx - I$ și

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + \mathscr{C}$. Obținem $I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a} + a\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|\right) + \mathscr{C}$.

Observaţie: Avem următoarele funcții hiperbolice: sh, ch, th : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cth : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definite astfel: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

2. Calculați primitivele următoarelor funcții:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} x$; b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 + 1)^2}$;

c) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}}$; d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$;

Cuprins

Capitolul 3. APLICAŢII ALE INTEGRALEI DEFINITE