PETRE NĂCHILĂ

Analiză matematică pentru toți

Clasa a XI-a

Editura NOMINA

2. Demonstraţi **inegalitatea lui Cauchy–Buniakovsky–Schwarz**:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),\ \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}\ .$$

Soluţie. Pornim de la inegalitatea evidentă: $\sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2 \ge 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Obţinem inegalitatea echivalentă: $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 x^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Inegalitate este echivalentă cu $\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \le 0$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

Probleme propuse

1. Folosind axiomele structurii algebrice a lui $\mathbb{R}$, arătaţi că:

a) $\forall\ x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;

b) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$;

c) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, (-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -x \cdot y$;

d) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, -(x) \cdot (-y) = x \cdot y$;

e) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}, -(x + y) = (-x) + (-y)$.

2. Folosind axiomele structurii de ordine a lui $\mathbb{R}$, arătaţi că:

a) $\forall\ x, y, a, b \in \mathbb{R}, x \le y$ şi $a \le b \Rightarrow x + a \le y + b$;

b) $\forall\ x, y, a, b \in \mathbb{R}, 0 \le x \le y$ şi $0 \le a \le b \Rightarrow xa \le by$;

c) $\forall\ x \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0, x \le y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$;

d) $\forall\ x \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0, x \le y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \le 1$.

3. Demonstraţi **identitatea lui Catalan**:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},\ n \ge 1.$$

4. Demonstraţi **inegalităţile dintre medii** pentru două numere reale, strict pozitive, a_1, a_2 şi apoi pentru n numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$m_h \le m_g \le m_a \le m_h$ (**Cauchy**, 1821),

cu egalitate atunci când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Probleme rezolvate

1. Arătaţi că:

a) $|x + y| \le |x| + |y|, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$; b) $\left|x+\frac{a+b}{2}\right| \le \frac{1}{2}(|x-a|+|y-b|)$, $a, b, x \in \mathbb{R}$.

Soluţie: a) Dacă $x + y \ge 0$ atunci, din definiţia modulului, rezultă că $|x + y| = x + y$. Dacă $x + y < 0$, atunci $|x + y| = -(x + y) = -x - y = |-x| + |-y| = |x| + |y|$ (am folosit proprietatea modulului $|-x| = |x|, \forall\ x \in \mathbb{R}$).

b) Aplicăm rezultatul de la punctul a) („inegalitatea triunghiului”) şi obţinem:

$$\left|x+\frac{a+b}{2}\right| \le \frac{1}{2}|2x-(a+b| = \frac{1}{2}|(x-a)+(y-b)| \le \frac{1}{2}(|x-a|+|y-b|),\ \forall\ x, a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Fie $V \in V(x_0)$ şi $W \in V(x_0)$. Arătaţi că $V \cap W \in V(x_0)$.

Soluţie: $V \in V(x_0) \Rightarrow \exists\ I \subset V$, interval, astfel încât $x_0 \in I \subset V$ (1); $W \in V(x_0) \Rightarrow \exists\ J \subset$ $\subset V$, interval, astfel încât $x_0 \in J \subset W$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow x_0 \in I \cap J \subset V \cap W$. Deci $V \cap W \in V(x_0)$.

Probleme propuse

1. Reprezentaţi pe axa numerelor reale punctele -1 şi $\sqrt{3}$. Determinaţi toate intervalele deschise de numere reale formate pe axa numerelor reale având ca extremităţi aceste numere. Arătaţi că intervalul $\left[-1, \sqrt{3}\right]$ este vecinătate a oricărui număr $x_0 \in \left(-1, \sqrt{3}\right)$, dar nu şi pentru $x_0 \in \left\{-1, \sqrt{3}\right\}$.

2. Demonstraţi următoarele proprietăţi ale modulului:

a) $|x| \ge 0, \forall\ x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; b) $|x| = |-x|, \forall\ x \in \mathbb{R}$;

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$; d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall\ x, y \in \mathbb{R}, y \ne 0$;

e) $|x + y| \le |x| + |y|, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$ (vezi exerciţiul rezolvat).

3. Arătaţi că:

a) $|x| \le \varepsilon, \varepsilon > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon \le x \le \varepsilon$; b) $|x| > \varepsilon, \varepsilon > 0 \Leftrightarrow x < -\varepsilon$ sau $x > \varepsilon$.

4. Demonstraţi că $||x| - |y|| \le |x - y|, \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

5. Arătaţi că $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \forall\ x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$.

6. Fie $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$, distanţa dintre punctele de coordonate x, respectiv y. Arătaţi că:

a) $\mathrm{d}(x, y) \ge 0, \forall\ x, y \in \mathbb{R}, \mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; b) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x), \forall\ x, y \in \mathbb{R}$;

c) $\mathrm{d}(x, y) \le \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(y, z), \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

$f_s'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(c(x)) = f'(x_0) = \alpha$. Analog se demonstrează că $f_d'(x_0) = \alpha$ şi deci $f'(x_0) = \alpha$.

Observaţii:

1. Consecinţa se poate aplica separat numai pentru derivatele la stânga, respectiv la dreapta.

2. Consecinţa reprezintă o condiţie suficientă pentru ca f să fie derivabilă în x_0. Această condiţie nu este însă şi necesară.

Exemplu. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ x, & x = 0 \end{cases}$. Se demonstrează că f este continuă şi derivabilă în 0. Într-adevăr, $|f(x) - f(0)| = \left|x^2 \sin\frac{1}{x}\right| \leq x^2 \to 0$ pentru $x \to 0$, respectiv $\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$, $x \neq 0$. Se arată că $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ nu există.

Teorema lui Cauchy (Augustin, 1789 – 1857)

Fie funcţiile $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ având proprietăţile:

a) f şi g continue pe $[a, b]$;
b) f şi g sunt derivabile pe (a, b);
c) $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$.

Atunci $g(a) \neq g(b)$ şi există $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Demonstraţie. Dacă am avea $g(b) = g(a)$, atunci conform teoremei lui Rolle există $c \in (a, b)$ cu $g'(c) = 0$ (contradicţie).

Considerăm funcţia $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - mg(x)$, $m \in \mathbb{R}$. Funcţia h este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b). Punând condiţia $h(a) = h(b)$, obţinem $m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Aplicând teorema lui Rolle funcţiei h pe $[a, b]$, rezultă că există $c \in (a, b)$ astfel încât $h'(c) = 0$. Obţinem $\frac{f'(c)}{g'(c)} = m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Observaţii:

1. Teorema lui Cauchy se numeşte a doua teoremă de medie sau a doua teoremă a creşterilor finite.

2. Teorema lui Lagrange reprezintă un caz particular al teoremei lui Cauchy (se ia $g(x) = x$, $\forall\, x \in [a, b]$).

Cuprins

	Enunțuri	Soluții
Capitolul 1. FUNCȚII REALE DERIVABILĂ REALĂ		
1.1. Mulțimea numerelor reale	3	327
1.2. Reprezentarea geometrică a numerelor reale	7	328
1.3. Mulţimea $\mathbb{Q}$. Mulţimea $\mathbb{R}$. Mulţimi mărginite	12	328
1.4. Funcţii reale de variabilă reală	16	330
1.5. Operaţii algebrice cu funcţii reale. Funcţia polinomială. Funcţia raţională	21	332
1.6. Clase de funcţii reale. Funcţii pare. Funcţii impare. Funcţii periodice. Funcţii monotone. Funcţii mărginite	25	333
1.7. Funcţia putere cu exponent întreg	30	334
1.8. Funcţia radical. Funcţia putere cu exponent raţional. Funcţia putere	34	335
1.9. Funcţia exponenţială. Funcţia logaritmică	39	337
1.10. Funcţiile trigonometrice	43	339
1.11. TESTE DE EVALUARE	49	
Capitolul 2. ŞIRURI DE NUMERE REALE		
2.1. Şiruri de numere reale	51	339
2.2. Şiruri recurente	57	340
2.3. Limita unui şir. Şiruri convergente	63	341
2.4. Operaţii cu şiruri convergente. Criterii de convergenţă	69	343
2.5. Subşiruri. Şiruri Cauchy	74	343
2.6. Monotonie şi convergenţă. Şirul *e*	76	344
2.7. Şirurile cu limitele $+\infty$ şi $-\infty$	81	346
2.8. Limite remarcabile. Criterii de convergenţă	85	348
2.9. Calculul limitelor în cazurile de nedeterminare	90	351
2.10. TESTE DE EVALUARE	95	
Capitolul 3. LIMITE DE FUNCȚII		
3.1. Limita unei funcţii într-un punct	98	352
3.2. Limite laterale. Proprietăţi ale funcțiilor care nu au limită	104	353
3.3. Calculul limitelor funcţiilor elementare	109	353
3.4. Limitele funcţiilor compuse	118	354
3.5. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii. Cazul $\frac{0}{0}$	122	355
3.6. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$	125	356
3.7. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii. Cazul $\infty - \infty$	128	356
3.8. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcţii. Cazurile $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞	131	357
3.9. Asimptote la graficul unei funcţii reale	135	357

3.10. TESTE DE EVALUARE 140

Capitolul 4. CONTINUITATE

4.1. Funcţii continue 143 357
4.2. Funcţii continue pe un interval. Proprietatea lui Darboux 151 359
4.3. Studiul existenţei soluţiilor unor ecuaţii în ℝ. Stabilirea imaginii unei funcții continue 157 360
4.4. Semnul unei funcţii continue pe un interval de numere reale 161 360
4.5. TESTE DE EVALUARE 164

Capitolul 5. DERIVABILITATE

5.1. Derivata unei funcţii într-un punct. Diferenţiala unei funcții 167 361
5.2. Derivate laterale. Interpretare grafică 178 363
5.3. Reguli de derivare. Derivatele funcţiilor elementare 188 365
5.4. Derivarea funcţiilor compuse 195 367
5.5. Derivarea inversei unei funcţii 201 369
5.6. Derivate de ordin superior. Rădăcini multiple ale ecuaţiilor polinomiale 206 371
5.7. Teorema lui Fermat 213 373
5.8. Teorema lui Rolle 219 374
5.9. Şirul lui Rolle 226 376
5.10. Teorema lui Lagrange 230 377
5.11. Consecinţe ale teoremelor creşterilor finite. Teorema lui Darboux. Formula lui Taylor 236 379
5.12. Regulile lui l'Hospital 240 380
5.13. Rolul primei derivate în studiul funcţiilor 247 380
5.14. Puncte de extrem 253 381
5.15. Demonstrarea unor inegalităţi cu ajutorul derivatelor 258 383
5.16. Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor 262 385

Capitolul 6. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR

6.1. Reprezentarea grafică a funcţiilor 268 387
6.2. Rezolvarea grafică a ecuaţiilor 286 407
6.3. Conice 290 410
6.4. Reprezentarea grafică a conicelor 294 411
6.5. Probleme de tangenţă 299 412
6.6. TESTE DE EVALUARE 305

PROBLEME RECAPITULATIVE 308