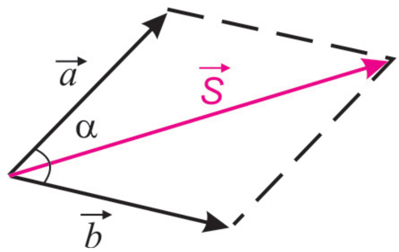
Introducere

NOȚIUNI DE CALCUL VECTORIAL

Vectorii sunt mărimi caracterizate prin modul și unități de măsură, punct de aplicație (origine), direcție și sens.

SUMA VECTORIALĂ



$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$$

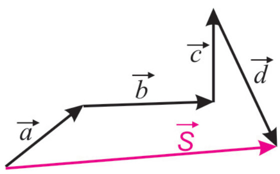
$$\boxed{\vec{S} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}$$

Direcția și sensul se obțin cu regula paralelogramului.

$$\text{Dacă}: |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \vec{S} = \sqrt{2a^2(1+\cos\alpha)}$$

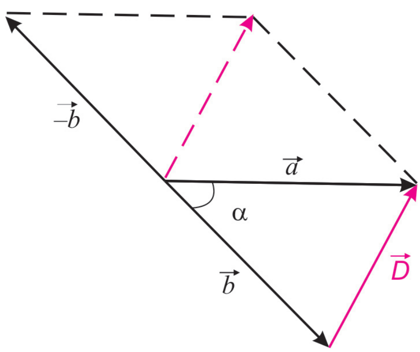
$$\boxed{|\vec{S}| = 2a\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Suma mai multor vectori se mai realizează astfel:



Se așază vectorii cu originea unuia în vârful celui precedent. ***Suma lor este vectorul care unește originea primului cu vârful ultimului.***

DIFERENȚA VECTORIALĂ



$$\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\boxed{\vec{D} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}$$

Direcția și sensul: originea în vârful scăzătorului și vârful în vârful descăzutului.

$$\text{Dacă}: |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \vec{D} = \sqrt{2a^2(1-\cos\alpha)}$$

$$\boxed{|\vec{D}| = 2a\sin\frac{\alpha}{2}}$$

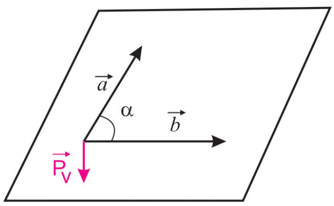
PRODUSUL UNUI SCALAR CU UN VECTOR $\vec{P} = a \cdot \vec{b}$

Este un vector: $\boxed{\left|\vec{P}\right| = a \cdot \left|\vec{b}\right|}$ cu **direcția și sensul** lui $\vec{b}$.

PRODUSUL SCALAR A 2 VECTORI $P_s = \vec{a} \cdot \vec{b}$

Este un scalar: $\boxed{P_s = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\alpha}$

PRODUSUL VECTORIAL A 2 VECTORI $\vec{P}_v = \vec{a} \times \vec{b}$

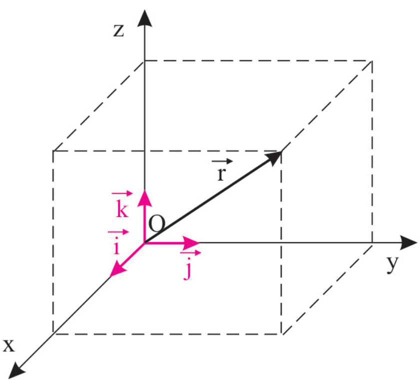


Este un vector cu:

$\boxed{\left|\vec{P}_v\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\alpha}$

– **direcția** perpendiculară pe $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$;
– **sensul** dat de regula burghiului.

Versorii sunt vectori cu modulul egal cu unitatea, iar direcția și sensul sunt cele ale vectorului respectiv. În sistemul rectangular de axe, versorii se notează cu:



$\vec{i}$ (pe axa Ox)

$\vec{j}$ (pe axa Oy)

$\vec{k}$ (pe axa Oz)

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

Astfel: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \qquad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Vectorul $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ are modulul:

$$\boxed{\left|\vec{r}\right| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

I CINEMATICA

1. MIȘCARE, TRAIECTORIE, VECTOR DEPLASARE

Mecanica studiată în acest capitol este ***mecanica clasică newtoniană***, bazată pe cele 3 principii ale lui Newton.

Mișcarea unui corp este schimbarea poziției sale față de alte corpuri.

Un corp este în ***repaus*** dacă poziția sa față de alte corpuri nu se schimbă.

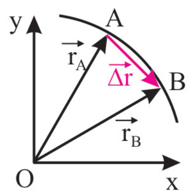
Pentru a studia mișcarea unui corp, se alege un alt corp de referință, numit ***sistem de referință***.

Mișcarea corpurilor se studiază, de cele mai multe ori, înlocuindu-le printr-un ***punct material*** care este caracterizat prin masa corpului, neavând dimensiuni geometrice.

În timpul mișcării corpurile descriu curbe, numite ***traiectorii***.

Sistemele de referință se reprezintă prin ***axe de coordonate***, în plan sau în spațiu.

Poziția mobilului în spațiu este precizată prin ***vectorul de poziție***, care are originea în sistemul de axe de coordonate și vârful în poziția punctului material pe traiectorie.



Deplasarea mobilului este variația coordonatelor sale:

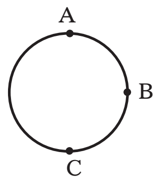
$\vec{r}_A, \vec{r}_B$ **vectorii de poziție** în punctele A și B ale traiectoriei

$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A}$ **vectorul deplasare**

OBSERVAȚIE: lungimea traiectoriei diferă de vectorul deplasare.

EXEMPLU

Să se calculeze:



a) spațiul parcurs; b) vectorul deplasare

pentru un mobil care merge pe o traiectorie circulară de rază R, între punctele:

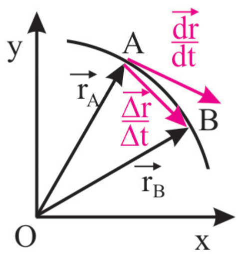
1. A – B
2. A – C
3. A – A (după parcurgerea cercului).

REZOLVARE:

1\. a) $S_{AB} = \dfrac{2\pi R}{4} = \dfrac{\pi R}{2}$; 2. a) $S_{AC} = \dfrac{2\pi R}{2} = \pi R$; 3. a) $S_{AA} = 2\pi R$;

b) $\Delta r_{AB} = R\sqrt{2}$; b) $\Delta r_{AC} = 2R$; b) $\Delta r_{AA} = 0$.

2. VECTORUL VITEZĂ. VECTORUL ACCELERAȚIE



Viteza medie a punctului material, care se deplasează pe o traiectorie oarecare, într-un interval de timp Δt, este:

$$\boxed{\vec{v}_{medie} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$ (este **secantă** la traiectorie)

$\vec{r}_A, \vec{r}_B$ – vectori de poziție

Viteza momentană este limita spre care tinde acest raport, dacă $\Delta t \to 0$; adică este derivata funcției $\vec{r}(t)$ în raport cu timpul:

$$\boxed{\vec{v}_{momentană} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

(este **tangentă** la traiectorie)

PROBLEME

1 Un corp se deplasează după legea: $x = 8 + 20t - 2t^2$. Să se calculeze:
a) viteza medie în primele 3 s;
b) viteza momentană la t = 3s.

REZOLVARE:

a) $\left.\begin{array}{l} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \\ t_2 = 3s \Rightarrow x_2 = 50 \end{array}\right| \Rightarrow v_{medie} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{42}{3} = 14\,m/s$

b) $v_{mom} = 20 - 4t$

la $t = 3$ s $\Rightarrow v_{mom} = 8$ m/s

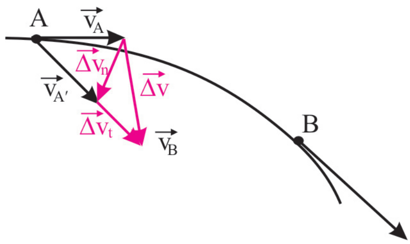
2 Un corp se deplasează după legea: $x(t) = 2t^2 + 5t + 3$ (m). Care sunt vitezele momentane la momentele: a) $t_1 = 3$ s ; b) $t_2 = 8$ s?

REZOLVARE:

$v = x'(t) = 4t + 5$

a) $v_1 = 17$ m/s; b) $v_2 = 37$ m/s.

VECTORUL ACCELERAȚIE



Dacă se mută punctul de aplicație al vectorului $\vec{v}_B$ în A și se pune pe suportul lui un vector $\vec{v}'_A$, astfel încât $|\vec{v}'_A| = |\vec{v}_A|$, atunci se pot defini:

$\left|\overrightarrow{\Delta v_t}\right| = |\vec{v}_B| - |\vec{v}_A|$ (variația **tangențială** a vitezei)

$\overrightarrow{\Delta v_n} = \vec{v}'_A - \vec{v}_A$ (variația **normală** a vitezei)

$\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{\Delta v_t} + \overrightarrow{\Delta v_n}$ (variația **totală** a vectorului viteză)

$$\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta v_t}}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{\Delta v_n}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n}$$

$$\boxed{a_{mom} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)}$$

CLASIFICAREA MIȘCĂRILOR

Mișcarea uniformă

$(\vec{a}_t = 0)$

- rectilinie

  $a = 0 \quad (\vec{a}_n = 0)$

- curbilinie

  $\vec{a} = \vec{a}_n \quad (\vec{a}_n \neq 0)$

Mișcarea accelerată

$(\vec{a}_t \neq 0)$

- rectilinie

  $\vec{a} = \vec{a}_t \qquad (\vec{a}_n = 0)$

- curbilinie

  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (\vec{a}_n \neq 0)$

Dacă $\Delta t \to 0 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

3. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ

($\vec{v}$ = constant)

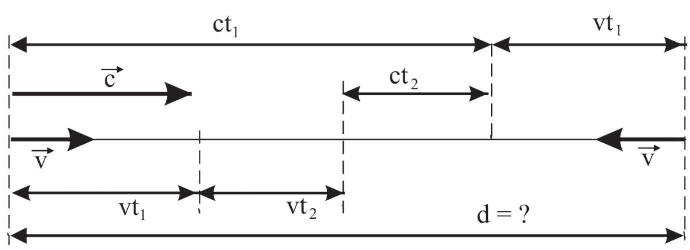
$\overrightarrow{\Delta v_t} = 0; \overrightarrow{\Delta v_n} = 0;$

$$\boxed{S = v \cdot t}$$

PROBLEME

1 Două avioane zboară unul spre celălalt, fiecare cu aceeași viteză, v. Care a fost inițial distanța dintre avioane, dacă un semnal sonor care se propagă cu viteza c, emis de un avion și reflectat de celălalt, se întoarce înapoi în timpul T?

REZOLVARE:



$$ct_1 + vt_1 = d \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{d}{c+v}$$

$$ct_1 = vt_1 + vt_2 + ct_2$$

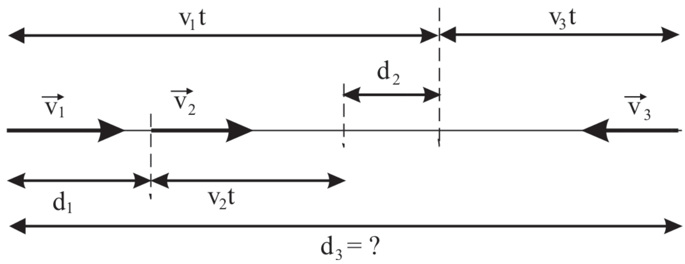
$$t_2 = \frac{(c-v)t_1}{c+v} = \frac{d(c-v)}{(c+v)^2}$$

$$T = t_1 + t_2 \Rightarrow T = \frac{d}{c+v} + \frac{d(c-v)}{(c+v)^2}$$

$$d = \frac{T(c+v)^2}{2c}$$

2 Un autoturism se mișcă cu viteza v_1 în spatele unui autocamion care se mișcă cu viteza v_2. Când distanța dintre acestea este d, conducătorul autoturismului se angajează în depășire, dar vede venind un autobuz din sens opus cu viteza v_3. Ce distanță minimă d_3 trebuie să fie între autobuz și autoturism, pentru ca după depășire autoturismul să fie la distanța d_2 în fața autocamionului?

REZOLVARE:



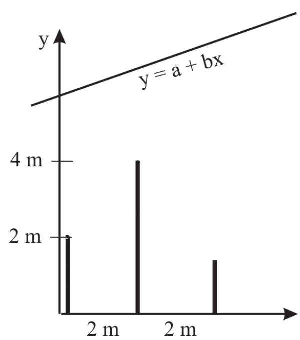
$$d_3 = v_1t + v_3t \Rightarrow t = \frac{d_3}{v_1 + v_3} \quad ; \quad v_1t = d_1 + v_2t + d_2$$

$$d_1 + d_2 = (v_1 - v_2)\frac{d_3}{v_1 + v_3}$$

$$d_3 = \frac{(d_1 + d_2)(v_1 + v_3)}{v_1 - v_2}$$

3 Trei pomi sunt plantați pe un rând la intervalul de 2 m. Înălțimile acestora sunt: 2 m, 4 m, respectiv 1,5 m, iar vitezele lor de creștere sunt: 20 cm/an, 8 cm/an, respectiv 14 cm/an. După câți ani vârfurile pomilor vor fi coliniare?

REZOLVARE:



$$2 + v_1t = a \Rightarrow 2 + 0{,}2t = a$$

$$4 + v_2t = a - 2b \Rightarrow 4 - 0{,}08t = a - 2b$$

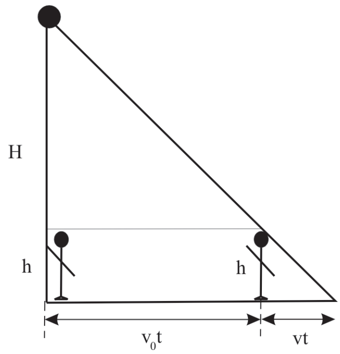
$$1{,}5 + v_3t = a - 4b \Rightarrow 1{,}5 + 0{,}14t = a - 4b$$

$$\begin{cases} 4 + 0{,}08t = 2 + 0{,}2t - 2b \\ 1{,}5 + 0{,}14t = 2 + 0{,}2t - 4b \end{cases}$$

$$t = 25 \text{ ani}$$

4 Un om de înălțime h pleacă cu o viteză v_0 de sub un felinar de înălțime H. Cu ce viteză v se va lăți umbra lui pe pământ?

REZOLVARE:



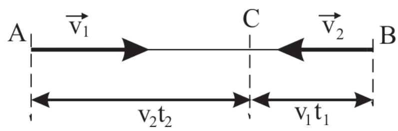
$$\frac{h}{H} = \frac{vt}{(v+v_0)t}$$

$$\frac{h}{H-h} = \frac{v}{v_0}$$

$$v = v_0 \cdot \frac{h}{H-h}$$

5 Din localitățile A și B, pornesc doi pietoni unul spre celălalt, într-o mișcare rectilinie uniformă. În momentul întâlnirii, primul parcursese cu d mai mult decât celălalt. După întâlnire pietonii își continuă drumul. Primul ajunge în localitatea B după un timp t_1 de la întâlnire, iar al doilea în localitatea A după un timp t_2. Să se afle vitezele cu care se deplasează cei doi pietoni.

REZOLVARE:



$$AC - BC = d \quad ; \quad t = \frac{AC}{v_1} = \frac{BC}{v_2}$$

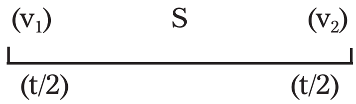
$$\frac{v_2t_2}{v_1} = \frac{v_1t_1}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$$

$$v_2t_2 - v_1t_1 = d$$

$$v_1\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}}t_2 - v_1t_1 = d \qquad v_1 = \frac{d\sqrt{t_2}}{t_2\sqrt{t_1} - t_1\sqrt{t_2}}$$

$$v_2 = \frac{d\sqrt{t_1}}{t_2\sqrt{t_1} - t_1\sqrt{t_2}}$$

Să se afle viteza medie dacă un mobil se deplasează astfel:

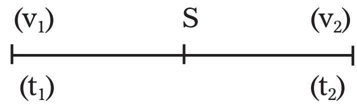


Prima **jumătate de timp** cu viteza v_1, a doua cu v_2

$$v_m = \frac{S}{t} = \frac{v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}}{t}$$

$$\boxed{v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

(media aritmetică)



Prima **jumătate din drum** cu viteza v_1, a doua cu v_2

$$v_m = \frac{S}{t} = \frac{S}{\frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2v_2}}$$

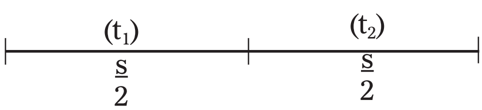
$$\boxed{v_m = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}}$$

(media armonică)

PROBLEME

1 O mașină parcurge prima jumătate din drumul său cu viteza v_1, iar restul drumului astfel: cu v_2, în prima jumătate a timpului necesar parcurgerii acestei distanțe, și în restul timpului cu v_3. Să se determine viteza medie.

REZOLVARE:



$\frac{t_2}{2}$ cu v_2, următorul $\frac{t_2}{2}$ cu v_3

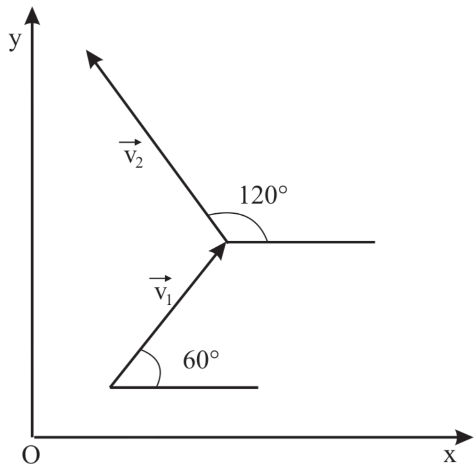
$$v'_{2m} = \frac{v_2 + v_3}{2}$$

$$v_m = \frac{2v_1 v'_{2m}}{v_1 + v'_{2m}} = \frac{v_1(v_2 + v_3)}{v_1 + \frac{v_2 + v_3}{2}}$$

$$v_m = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}$$

2 Un mobil parcurge consecutiv două distanțe egale, mișcându-se cu vitezele constante $v_1 = 20$ m/s, orientată sub unghiul $\alpha_1 = 60°$ față de Ox, și cu $v_2 = 40$ m/s, orientată sub unghiul $\alpha_2 = 120°$ față de aceeași axă. Să se calculeze viteza medie.

REZOLVARE:



Dacă proiecțiile vitezei medii pe axele Ox și Oy sunt v_{mx} și v_{my}:

$$v_m = \sqrt{v_{mx}^2 + v_{my}^2}$$

$$v_{mx} = \frac{2v_1\cos 60° v_2\cos 120°}{v_1\cos 60° + v_2\cos 120°}$$

$$v_{mx} = \frac{-20\cdot 40\cdot \frac{1}{2}}{20\cdot\frac{1}{2} - 40\cdot\frac{1}{2}}$$

$$v_{mx} = 40$$

$$v_{my} = \frac{2v_1\sin 60° v_2\sin 120°}{v_1\sin 60° + v_2\sin 120°}$$

$$v_{my} = \frac{2\cdot 20\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 40\frac{\sqrt{3}}{2}}{20\frac{\sqrt{3}}{2} + 40\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$v_m = \sqrt{1600 + \frac{1600}{3}} = \frac{80\sqrt{3}}{3}\,\text{m/s}$$