# Introducere

Dezvoltarea tehnologiilor şi tehnicii, a cunoaşterii în general, conduce la necesitatea adaptării învăţământului la cerinţele actuale prin aplicarea unor noi metode. Factorii implicaţi în educaţie recunosc posibilităţile de informare deosebite pe care copiii din generaţiile actuale le posedă prin utilizarea internetului, a mijloacelor de informare. Suntem adepţii formării noilor cadre din învăţământul preuniversitar în spiritul utilizării unor metode flexibile, bine adaptate acestor necesităţi.

Matematica este regina ştiinţelor, iar aritmetica este regina matematicii. Ca metodă deductivă, matematica a fost prima ştiinţă care a reprezentat un model pentru celelalte ştiinţe.

Trebuie înţeleasă ideea că matematica nu este doar o unealtă supusă tehnicii, aplicaţiilor directe, ci este un act de cultură în formarea fiecărui individ. Modul de raţionament dezvoltat prin studiul matematicii invadează aproape toate domeniile actuale ale cunoaşterii. Elevul nostru de astăzi, reprezintă adultul de mâine, care se va afla în situaţii total diferite de ceea ce credem noi astăzi că trebuie să ştie. De aici rezultă necesitatea formării continue a fiecăruia dintre noi, cât şi a spiritului pe care trebuie să îl formăm elevilor noştri.

Astfel, învăţământul este supus unor continue modificări, prin încercarea de a adapta programele, metodele şi de a forma tinerilor deprinderi de studiu cât mai eficiente. Şcoala este adaptată copiilor de nivel mediu, solicitând însuşiri intelectuale şi de caracter ce vizează mai mult latura exterioară a activităţii şi nu pe cea interioară. Aptitudinile necultivate şi nedezvoltate la timp se pierd. Aceasta reprezintă o modalitate prin care se explică micşorarea numărului de copii care excelează în clasele mari. Predispoziţiile ereditare sunt deschise influienţelor modelatoare ale acţiunilor socio-culturale. Omul dobândeşte atributul de dotat printr-un proces de prelucrare şi valorificare a ceea ce îi furnizează educaţia şi cultura mediului din care provine. Adevărata cultură ne-o câştigăm singuri. Şcoala, chiar şi cea superioară, ne dă doar o orientare generală în probleme. Pentru trebuinţele noastre practice, cât şi pentru satifacerea propriilor nevoi intelectuale, avem nevoie de cunoştinţe de amănunt, pe care numai prin muncă stăruitoare le putem câştiga.

O carte, o idee, un sfat dat la timp, pot valora mai mult decât o activitate didactică proiectată pe mai mulţi ani. Plecând de la nivelul de percepere şi operare a noţiunilor de către elev, trebuie să se susţină un demers didactic cât mai discret. Este corect să nu transmitem anumite prejudecăţi negative referitoare la unele discipline sau a unor capitole din aceeaşi disciplină, deoarece copilul le va asimila uşor, iar acestea pot stopa dezvoltarea normală, naturală. Dimpotrivă, este de dorit să urmărim ceea ce îl atrage , ceea ce îi face plăcere să studieze, să urmărim şi să susţinem ceea ce copilul îşi proiectează să îmbrăţişeze ca meserie. Devotamentul arătat copilului va avea efecte pozitive în timp. Povaţa izvorăşte din înţelepciune, presupune etică şi morală. Se doreşte ca fiecare generaţie viitoare să o depăşească pe cea prezentă. Oare care părinte şi care educator nu-şi doresc acest ţel ?

Se crează o concepţie corectă despre viaţă, mentalităţi, se exprimă un ideal. Să ne imaginăm o scară mai mult sau mai puţin ipotetică a cunoaşterii, pe care omul, sinteză între lut şi spirit, urcă mereu. El este menit să aibe întotdeauna înainte această scară, ce îi pregăteşte drumul spre înălţimi ale cunoaşterii şi afirmării sale. Cultura ştiinţifică este parte integrantă a culturii. De-a lungul veacurilor, marile valori ale omenirii au fost iniţiate în ştiinţă. De exemplu, pe Rudolf Steiner, o modestie înţeleaptă l-a făcut să aştepte până când şi-a însuşit pe deplin cuceririle ştiinţei moderne, pentru a se apleca asupra unei ştiinţe spirituale.

Pentru a preda noţiuni de matematică copiilor de vârstă preadolescentină, sunt indicate jocurile. Jocul are un rol deosebit în dezvoltarea aptitudinilor copiilor. Printre calităţile esenţiale în activităţile pe care le numim jocuri, vom enumera: 1) caracterul agreabil; 2) natura imprevizibilă; 3) aspectul problematic; 4) aspectul strategic.

Punctul 1) este descris de către psihologi, iar aspectele 2), 3), 4) fac obiectul disciplinelor ştiinţifice: teoria informaţiei, inteligenţă artificială şi teoria matematică a jocurilor. Prin joc se dezvoltă astfel diferite tipuri de gândire: logică, abstractă, combinatorială, inductivă, analogică, algoritmică, lingvistică etc. Fiind prin excelenţă o activitate de căutare, jocul modelează gândirea de la cunoscut la necunoscut, de la previzibil la imprevizibil. Astfel, îl asociem actului de creaţie, sensibilităţii. În acest sens, celebrul matematician francez Évariste Galois spunea: „În zadar vor matematicienii să ascundă. Ei nu demonstrază, ci combină şi compară. Şi numai izbindu-se dintr-o parte în cealaltă, ajung la adevăr“.

O înţelegere temeinică a unui capitol, chiar dacă este bine tratat într-un manual, se face prin studiul acestuia utilizând mai multe surse (alte manuale, tratate, culegeri de probleme, reviste de specialitate, cărţi în format electronic). Lectura trebuie făcută cu simţ critic, în pofida eventualei celebrităţi a autorului. Înţelegerea câştigată prin învingerea unei greutăţi, ne aduce o adevărată bucurie, ne provoacă să facem conexiuni între fapte care până atunci erau separate în mintea noastră. „Metoda istorică“ – spunea matematicianul român Dimitrie Pompeiu – „e atât de utilă şi uneori atât de fecundă. A privi îndărăt pe linia timpului, spre ceea ce a fost şi a ne da seama exact de mersul lucrurilor este un izvor de împrospătare şi întărire a cunoştinţelor“ .

O metodă de atragere a elevilor spre un domeniu îl reprezintă inserarea în lecţii a unor date biografice ale oamenilor de cultură. Merită să li se prezinte tinerilor maniera sclipitoare în care aceştia au rezolvat problemele timpului lor, cât şi modurile în care a decurs dezvoltarea ulterioară, graţie descoperirilor în cauză, până în zilele noastre. Astfel, şcoala impulsionează şi susţine utilizarea pozitivă a informaţiilor situate pe site-uri. La nivelul clasei pot fi create portofolii ale elevilor, se dezvoltă munca în echipă, prin gruparea pe acelaşi subiect a mai multora ce doresc să performeze în aria implicată. Se dezvoltă munca creatoare şi se stabilesc noi raporturi atât între elevi cât şi între elevi şi profesor. În ştiinţă există multe probleme deschise şi adesea apar altele noi. Este datoria noastră şi a generaţiilor ce vin de a le soluţiona. Pentru a dezvolta elevilor abilităţi de cercetare, de creativitate în domeniul matematicii se recomandă utilizarea revistelor de specialitate: Gazeta Matematică seriile A, B, cât şi Suplimentul acesteia (G.M.), Revista Arhimede, Cardinal, Revista Matematică din Timişoara (R.M.T.) etc. Ţinând seama de vechimea lor, amintim că există formatele electronice ale revistelor G.M. (pentru perioada 1895-2011) şi respectiv R.M.T. (1921-2011). Rezolvarea de probleme dezvoltă capacităţi intelectuale care vor fi utilizate în acţiuni viitoare ale adultului în domeniul său de activitate. Înţelegerea unui text prin decodificarea simbolurilor specifice matematicii, căutarea drumului de la ipoteză la concluzie prin utilizarea unui raţinament logic corect, reprezintă acţiuni care creează disponibilităţi intelectuale pentru viitorul adult. Societatea actuală utilizează mijloace electronice, care sunt aplicaţii directe ale matematicii discrete. Din acest motiv, în ultimii ani, matematica şcolară (şi nu numai aceasta) a fost invadată de probleme şi metode combinatoriale. Ceea ce noi adulţii învăţam în clasa a IX-a, a X-a, actualii elevi cunosc şi aplică la clase mult mai mici aceste noţiuni uneori pe cazuri particulare. Acesta reprezintă un motiv în plus ca educatorii (cadre didactice şi părinţi ai elevilor) să studieze continuu. Majoritatea popoarelor utilizează pentru „savant“ un singur cuvânt. Remarcăm faptul că există popoare care îl traduc în două cuvinte: „elev învăţat“, expicând că atunci când încetează calitatea de „elev“ , atunci dispare calitatea de „învăţat“. Iată o superbă explicaţie a necesităţii „învăţării permanente“.

Vom exemplifica răspunsul dat de Hannes Alfvèn (laureat al premiului Nobel pentru fizică în anul 1970) la întrebarea: există un secret al celebrităţii? „Aş menţiona că este vorba de relaţia dintre individ şi obiectul activităţii sale ştiinţifice, pe care trebuie să-l domine prin profunzimea de cunoştinţe, prin competenţă, prin capacitatea de înţelegere suplă şi complexă spre a obţine maximum pentru oameni, deoarece celebritatea ca act de creaţie nu poate exista în afara societăţii umane!“

Un deosebit aspect îl reprezintă evaluarea în triada predare-învăţare-evaluare. Au fost create la nivel mondial diferite modalităţi de evaluare: de tip pereche, alegere duală, alegere multiplă cu un singur răspuns corect, alegere multiplă cu un număr variabil de răspunsuri corecte, probleme cu răspuns deschis.

Tehnica perechilor solicită stabilirea unor corespondenţe între noţiunile învăţate şi proprietăţi ale acestora. Această tehnică poate aborda cu succes rezultate ale învăţării prin asociere, a unui important volum de rezultate într-un spaţiu redus.

Tehnica alegerii duale se caracterizează în mod esenţial prin solicitarea elevilor de a asocia unul sau mai multe enunţuri cu una din componentele unor cuplări de alternative duale cum ar fi: adevărat-fals. Avantajul acestei tehnici este acela al abordării într-un interval de timp redus a unui volum de cunoştinţe de complexitate medie şi redusă.

Tehnica alegerii multiple cu un singur răspuns corect ( model dat la evaluările elevilor la sfârşit de ciclu de învăţământ sau la admitere la facultăţi), cât şi tehnica alegerii multiple cu un număr variabil de răspunsuri corecte, solicită distincţia dintre răspunsul corect şi distractori( alternative incorecte dar plauzibile). Aceste tehnici conferă un înalt nivel de flexibilitate şi dispune proiectantului de un bun control asupra rezultatului de învăţare abordat de fiecare problemă (item).

Tehnica problemelor cu răspuns deschis prezintă rezolvările clasice, complete.

Se remarcă o participare numeroasă a elevilor din clasele primare şi gimnaziale la numeroase concursuri şcolare cât şi la olimpiadele destinate lor. Pentru a participa cu succes ei trebuie formaţi prin utilizarea unei bune bibliografii. Remarcăm numeroase apariţii editoriale pentru elevi. Mai mult, la nivelul liceal, există cel puţin trei lucrări specializate pentru fiecare capitol din programa şcolară. Ne dăm astfel seama de efortul intelectual pe care trebuie să îl facă un elev performant cât şi de nivelul de competenţă al cadrului didactic implicat în pregătirea tinerilor de performanţă.

Fiecare student doritor să performeze este invitat să dezvolte aceste note de curs şi probleme de seminar prin parcurgerea bibliografiei orientative, prin elaborarea de portofolii în care să pregătească structura lecţiilor viitoare. Să nu uităm că un profesor veritabil trebuie în primul rând să se privească în oglinda propriului spirit, să fie mulţumit de ceea ce se reflectă.

Prezentul curs, aflat la a doua ediţie, este alcătuit şi pentru a susţine pregătirea tinerelor cadre didactice în obţinerea titlurilor definitiv, gradul II sau gradul I.

**Lector Dr. *Costel-Dobre Chiteş*, Bucureşti, 6.12.2015**

# CURSUL NR.1

## Elemente de logică şi teoria mulţimilor

Logica matematică [gr.logos-„raţiune“] este o ştiinţă care are ca obiect studiul formelor propoziţionale şi legile de raţionare cu expresii propoziţionale, precum şi modele care permit realizarea acestui studiu. Logica matematică este interesată numai de valoarea logică a propoziţiilor adică dacă sunt adevărate sau nu.

Argumentele care validează demonstraţiile convenţionale formează logica.

### Notă istorică

Primul studiu sistematic al raţionamentelor logicii a fost opera filosofului grec Aristotel (384-322 î.Hr.). Deşi bazele filosofiei au fost puse de Platon (427-347 î.Hr.), Aristotel este cel care a tras cocluziile necesare din filosofia acestuia şi a dezvoltat-o.

În tratatul său de logică, Aristotel prezintă o colecţie a principalelor raţionamente deductive. Cultura aristotelică a fost preluată de arabi, prin traducerile siriene, de unde a trecut în Evul Mediu Creştin.

Matematicianul german Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) este considerat primul filosof care a intenţionat să dezvolte logica simbolistică ca limbaj ştiinţific universal. Aceste studii au dat un mare impuls creaţiei în domeniul matematicii. În secolul al XIX-lea, matematicienii englezi George Boole (1815-1864) şi Augustus De Morgan (1806-1871) au revoluţionat logica aplicând metodele algebrei simbolistice. Contribuţii ulterioare au fost date de inginerul şi filosoful american Charles Sanders Peirce (1839-1902) care a introdus şi conceptul de cuantificator în logica simbolică, Gottlieb Frege (1848-1925), Bertrand Russell (1872-1970), David Hilbert( 1862-1943), Paul Bernays (1888-1977).

### Conectori logici şi table de adevăr

Propoziţiile sunt notate prin litere mici: $p, q, r, \ldots$ fiind considerate ca fiind fie false fie adevărate.

Valoarea de adevăr a unei propoziţii false este 0, iar a unei propoziţii adevărate este 1.

**Exemple**

$p$: „Matematica este o disciplină ştiinţifică“.

$q$: „$2 + 5 = 8$“.

Propoziţiile precedente sunt numite primitive, deoarece nu pot fi descompuse în altele mai mici.

Putem crea alte propoziţii plecând dela cele existente în două moduri:

1) Transformând o propoziţie $p$ în negaţia sa $\rceil p$ (se citeşte non p).

De exemplu: $\rceil p$: „Matematica nu este o disciplină ştiinţifică“.

2) Combinând mai multe propoziţii prin utilizarea conectorilor logici:

a) conjuncţia, noatată $\wedge$, se citeşte „şi“;

b) disjuncţia, notată $\vee$, se citeşte „sau“;

c) implicaţia, notată $\rightarrow$, se citeşte „implică“ . Dacă considerăm implicaţia $p \rightarrow q$, atunci $p$ este ipoteza, iar $q$ este concluzia. Mai spunem că $p$ este suficient să aibe loc $q$;

$q$ este necesar dacă are loc $p$; $q$ este o condiţie necesară pentru $p$; dacă $p$ atunci $q$;

d) echivalenţa, notată $\leftrightarrow$, se citeşte „echivalent“. De exemplu $p \leftrightarrow q$ se citeşte: $p$ dacă şi numai dacă $q$; $p$ este necesar şi suficient pentru $q$.

Propoziţiile compuse sunt definite prin următoarele tabele:

| $p$ | $\rceil p$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Reţinem că propoziţia compusă $p \wedge q$ este adevărată numai când ambele propoziţii sunt adevărate. Propoziţia compusă $p \vee q$ este falsă numai când ambele propoziţii sunt false.

Falsul implică orice.

Vom aminti un raţionament al logicianului englez Bertrand Russell (filosof, matematician, critic social şi laureat al premiului Nobel pentru literatură, în anul 1950).

Mare i-a fost mirarea unui filosof când a aflat de la logicianul B. Russell că dintr-o afirmaţie falsă poate fi dedusă oricare alta. El a întrebat:

„– Dumneavoastră consideraţi că din afirmaţia falsă $5 = 2 + 2$ rezultă afirmaţia că sunteţi Papa de la Roma?

– Desigur! a răspuns cu fermitate Russell şi a expus demonstraţia:

Dacă scădem 2 din fiecare membru, vom obţine $3 = 2$ sau prin scădere cu o unitate obţinem echivalent $2 = 1$, atunci Papa de la Roma şi cu mine suntem una şi aceeaşi persoană.“

**Exerciţiu rezolvat**

Să se determine valorile de adevăr ale propoziţiilor:

$$p \to (p \vee q); \;\; p \wedge (\rceil p \wedge q).$$

*Soluţie.* Vom completa următorul tabel:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \to (p \vee q)$ | $\rceil p$ | $\rceil p \wedge q$ | $p \wedge (\rceil p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Definiţie.** *O propoziţie compusă se numeşte tautologie dacă este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propoziţiilor sale componente.*

*O propoziţie compusă se numeşte contradicţie dacă este falsă indiferent de valoarile de adevăr ale propoziţiilor sale componente.*

Din exemplul de mai sus, propoziţia $p \to (p \vee q)$ este o tautologie, iar propoziţia $p \wedge (\rceil p \wedge q)$ este o contradicţie.

În general, o demonstraţie este formată dintr-o listă de propoziţii date, numite *premise*, şi o propoziţie care se numeşte *concluzie*.

Să notăm premisele cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ şi cu $q$ concluzia. Astfel vom avea:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q,$$

unde în ipoteză avem conjuncţia a $n$ premise. Observăm că dacă cel puţin una dintre premise este falsă, atunci indiferent de valoarea de adevăr a lui $q$ implicaţia este adevărată. Dacă toate premisele sunt adevărate şi $q$ este adevărată, atunci implicaţia este adevărată.

**Exerciţiu rezolvat**

Dacă propoziţiile $p$, $q$ sunt primitive astfel ca implicaţia $p \to q$ să fie falsă, să se determine valoarea de adevăr pentru:

a) $p \wedge q$; b) $\rceil p \vee q$; c) $q \to p$; d) $\rceil q \to \rceil p$.

*Soluţie.* Avem $p$ adevărată şi $q$ este falsă. Rezultă:

a) 0;   b) 0;   c) 1;   d) 0.

**Exerciţiu rezolvat**

Să se determine valoarea de adevăr ale următoarelor implicaţii:

a) dacă $4 + 8 = 13$ atunci $6 + 9 = 20$;

b) dacă $7 + 9 = 16$ atunci $6 + 8 = 14$;

c) dacă $4 + 9 = 13$ atunci $5 + 9 = 18$;

d) dacă Thomas Jefferson a fost primul preşedinte al S.U.A. atunci
$$3 + 8 = 11.$$

*Soluţie.* c) Este falsă; a), b),d) sunt adevărate. T. Jefferson a fost al treilea preşedinte în perioada 1801-1809. Primul preşedinte a fost George Washinton (1789-1797).

**Exerciţiu rezolvat**

Se consideră tabelul de adevăr următor:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \to (p \vee q)$ | $\rceil p$ | $\rceil p \wedge q$ | $p \wedge (\rceil p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

O propoziţie se numeşte *tautologie* dacă este adevărată indiferent de valorile de adevăr ale propoziţiilor sale componente. Astfel propoziţia $p \to (p \vee q)$ ale cărei valori de adevăr sunt în coloana a IV-a a tabelului este o tautologie.

O propoziţie se numeşte *contradictorie* dacă este falsă indiferent de valorile de adevăr ale propoziţiilor sale componente. Astfel propoziţia $p \wedge (\rceil p \wedge q)$ este contradictorie, aşa cum rezultă din coloana a VII-a din tabel.

**Exerciţiu rezolvat**

Se consideră tabelul de adevăr următor:

| $p$ | $q$ | $\rceil p$ | $\rceil p \vee q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Două propoziţii $s_1$, $s_2$ se numesc *echivalente* şi scriem $s_1 \Leftrightarrow s_2$ dacă $s_1$ este simultan falsă sau simultan adevărată cu $s_2$.

Din tabelul precedent, deducem că $p \to q \Leftrightarrow \rceil p \vee q$.

**Exerciţiu rezolvat**

Se consideră tabelul de adevăr următor:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\rceil(p \wedge q)$ | $\rceil p$ | $\rceil q$ | $\rceil p \vee \rceil q$ | $p \vee q$ | $\rceil(p \vee q)$ | $\rceil p \wedge \rceil q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Din acest tabel rezultă că au loc relaţiile lui De Morgan:

$$\rceil(p \wedge q) \Leftrightarrow \rceil p \vee \rceil q, \qquad \rceil(p \vee q) \Leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q.$$

Vom nota cu $T_0$ tautologia şi cu $F_0$ propoziţia contradictorie. Vom enumera lista proprietăţilor algebrei propoziţiilor care se demonstrează cu ajutorul tabelelor de adevăr:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\rceil\rceil p \Leftrightarrow p$ | (legea dublei negaţii) |
| 2) | $\rceil(p \wedge q) \Leftrightarrow \rceil p \vee \rceil q$ | (legile lui De Morgan) |
| | $\rceil(p \vee q) \Leftrightarrow \rceil p \wedge \rceil q$ | |
| 3) | $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ | (legile comutativităţii) |
| | $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ | |
| 4) | $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ | (legile asociativităţii) |
| | $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ | |
| 5) | $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | (legea de distributivitate a lui $\vee$ faţă de $\wedge$) |
| | $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | (legea de distributivitate a lui $\wedge$ faţă de $\vee$) |
| 6) | $p \vee p \Leftrightarrow p$ | (legile de idempotenţă) |
| | $p \wedge p \Leftrightarrow p$ | |
| 7) | $p \vee F_0 \Leftrightarrow p$ | (legile elementrelor neutre) |
| | $p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$ | |
| 8) | $p \vee \rceil p \Leftrightarrow T_0$ | (legile inversării) |
| | $p \wedge \rceil p \Leftrightarrow F_0$ | |
| 9) | $p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$ | (legile de dominare) |
| | $p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$ | |
| 10) | $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ | (legile de absorbţie) |
| | $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ | |