ALGEBRĂ

Capitolul 1
NUMERE ÎNTREGI

1. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $A = (a + b)(a + b + 1)(c + d)(c + d + 1)$. Demonstrați că există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A = x^2 - y^2$.

2. Fie numărul $x(n) = \sqrt{4^n + 2^{n+1} + m}$, cu $m, n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că dacă $x(0)$ și $x(1) \in \mathbb{N}$, atunci $x(n) \in \mathbb{N}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Calculați suma cifrelor numărului $\sqrt[3]{A(n)}$, unde $A(n) = 9 \cdot \underbrace{111...1}_{n}\underbrace{444...4}_{n}\underbrace{777...7}_{n} + 8$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Determinați tripletele de numere naturale (a, b, c), $a \neq 0$, știind că două dintre numere sunt rădăcinile ecuației $ax^2 - bx + c = 0$.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că există $x, y, z, m \in \mathbb{N}^*$ unice, astfel încât:

$x + y + z = 2^{n+2}$ și $xy + yz + zx = 3 \cdot 4^n + 2^n(x + y)$, iar $x^2 + y^2 = mz$.

6. Fie $m, n, p \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m + n + p = 0$. Fie $A = m^4 + n^4 + p^2$. Determinați $x \in \mathbb{N}^*$ minim pentru care numărul xA este pătrat perfect.

7. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și fie $A_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 4n + 1 \leq x \leq 2n^2 + 1;\ 2 \nmid x\}$. Dacă S_n este suma tuturor elementelor mulțimii A_n, determinați n pentru care $S_n \leq 1000$.

8. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați partea întreagă a numărului $A_n = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot ... \cdot \left(2^{2^n} + 1\right)}{2^{2^{n+1}}}$.

9. Demonstrați că există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (a, b) pentru care $a + 1 \mid b^2$ și $b + 1 \mid a^2$.

10. Determinați numerele prime a, b, c, d, e pentru care avem $a = b + c = d - e$.

11. Fie $A = \left\{ \dfrac{1}{\overline{abcd}} \,\middle|\, \overline{abcd} = x^2 + 3x^2 + 2x,\ x \in \mathbb{N} \right\}$. Determinați suma elementelor mulțimii A.

12. Determinați numărul elementelor și suma modulelor elementelor mulțimii $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{2000}$, unde $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^4 = 2^n\}$.

13. Fie a, b, c, d numere naturale impare.

a) Demonstrați că numărul $A = ab + ac + bc$ nu este pătrat perfect.

b) Determinați patru numere a, b, c, d pentru care numărul $B = ab + ac + ad + bc + bd + cd$ este pătrat perfect.

14. Determinați numărul elementelor mulțimii $A_n = \{9, 99, ..., \underbrace{999...9}_{n}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, care sunt pătrate perfecte.

15. Fie $A = (2^2 - 1)(3^2 - 1)(4^2 - 1) \cdot ... \cdot (99^2 - 1)$. Determinați 350 numere naturale a, pentru care $\frac{A}{a}$ este pătrat perfect.

16. Se consideră șirul de numere $1 + 3 + 5 + 7$, $5 + 7 + 9 + 11$, $9 + 11 + 13 + 17$, ... Determinați:

a) al 100-lea termen al șirului;

b) suma primilor 100 termeni ai șirului.

17. Determinați restul împărțirii numărului $A = 2^{100} + (2^2)^{100} + (2^3)^{100} + ... + (2^{100})^{100}$ la numărul $a = 2^{100} - 1$.

18. Rezolvați ecuația $(1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot ... \cdot 9!) \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot ... \cdot 9^8) = (9!)^n$.

19. Fie $d = (a, b)$ c.m.m.d.c. al numerelor a și b. Determinați perechile (a, b) pentru care $\frac{a+b}{a-b} = \frac{4}{d}$.

20. Determinați două submulțimi disjuncte A, B cu număr maxim de elemente, unde $A, B \subset \{1, 2, 3, ..., 8, 9, 10\}$, astfel încât produsul elementelor din A este egal cu produsul elementelor din B.

21. Știind că numărul $p = a^4 + a^2b^2 + b^4$ este număr prim, unde $a, b \in \mathbb{N}$, determinați $|a + b - 2|$.

22. În șirul infinit de numere 1, 9, 7, 5, 2, ..., fiecare cifră începând cu a cincea este egală cu ultima cifră a sumei precedentelor 4 cifre din șir. Care dintre secvențele (2, 3, 4, 6, 5), (3, 6, 7, 4, 0), (4, 6, 5, 3, 8), (8, 1, 9, 7, 5) apare în șir?

23. Fie numerele naturale $a_0, a_1, a_2, ..., a_{50}$ și suma $S = (-1)^{a_0} + (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + ... + (-1)^{a_{50}}$. Dacă A este mulțimea valorilor lui S, determinați suma modulelor elementelor mulțimii A.

24. Determinați numărul tripletelor (x, y, z) de numere naturale care îndeplinesc condiția $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx + 3$.

25. Determinați numărul numerelor $\overline{5abc5}$ care sunt pătrate perfecte.

26. Determinați numărul tripletelor de numere impare prime și consecutive.

27. Determinați cel puțin 20 de soluții ale ecuației $x^2 + y^2 = 2[x, y] + 9(x, y)$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x \leq 20$, $y \leq 20$, $[x, y]$ și (x, y) reprezentând c.m.m.m.c., respectiv c.m.m.d.c. al numerelor x și y.

28. Determinați $a, b, c \in \mathbb{N}$ știind că $3(abc + b + c) = 5(bc + 1)$.

29. Rezolvați în numere naturale ecuația $5 \cdot 2^x = 16 + 2^y$.

30. Determinați numerele prime p pentru care numărul $A = 24p + 1$ este pătrat perfect.

Capitolul 10
INEGALITĂȚI

Sunt adevărate următoarele inegalități remarcabile:

1) $a^n > a^{n-1}$, dacă a > 1, $n \in \mathbb{N}^*$;

2) $a^n < a^{n-1}$, dacă $0 < a < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$;

3) $(a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0$, dacă $0 < a \leq b$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$;

4) $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$, dacă a > 0; 5) $a + \dfrac{1}{a} \leq -2$, dacă a < 0;

6) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, $n \geq 1$;

7) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \geq 1$;

8) $\dfrac{a^2 + b^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, $a > 0$, $b > 0$;

9) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, $a, b, c \in \mathbb{R}$;

10) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$;

11) $n\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right) \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in \mathbb{R}$;

12) $\dfrac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$;

13) $0 < \dfrac{a}{b} < 1, x > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+x}{b+x}$;

14) $\dfrac{a}{b} > 1, x > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b} > \dfrac{a+x}{b+x}$;

15) $|a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$, $a_i \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$;

16) $||a| - |b|| \leq |a - b|$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;

17) Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ (constant), atunci:

$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ este maxim pentru $x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{k}{n}$;

18) Dacă $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = k$ (constant), atunci:

$x_1 + x_2 + ... + x_n$ este minimă pentru $x_1 = x_2 = ... = x_n = \sqrt[n]{k}$;

19) *Inegalitatea mediilor*: $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, $n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}};$$

20) Consecință la 19): $(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$;

21) *Inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz*:
$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. Avem „=" pentru $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ (sau $b_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0$);

22) *Inegalitatea lui Minkovski*:
$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + ... + (a_n + b_n)^2} \geq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$;

23) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall\ i = \overline{1, n}$. Notăm cu $S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $S_2 = b_1 + b_2 + ... + b_n$ și cu $S = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$. Avem:

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \Rightarrow n \cdot S \geq S_1 \cdot S_2$;

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \Rightarrow n \cdot S \leq S_1 \cdot S_2$;

$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \Rightarrow n \cdot S \leq S_1 \cdot S_2$ (Inegalitățile lui Cebîșev).

24) *Inegalitatea lui Bernoulli*:

$(1 + a)^n \geq 1 + na$, pentru $a \geq -1$, $n \geq 1$;

$(1 + a)^n \leq 1 + na$, pentru $a > -1$, $0 \leq n \leq 1$;

25) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, $x > 0$, $y > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Probleme propuse

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b = 4$. Atunci $a^4 + b^4 \geq 32$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b \geq 2$. Atunci $a^4 + b^4 \geq 2$.

3. *Inegalitatea lui Schur*: pentru orice $a, b, c > 0$, avem:

$$a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b) \geq 0.$$

4. Fie $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$. Arătați că $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

5. Pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$, avem $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

6. Fie $a, b, c > 0$. Atunci avem $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.

7. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$, $b > d$, $c > d$. Atunci avem $\frac{a}{b-d} + \frac{b}{c-d} + \frac{c}{a+2d} \geq a + b + c$.

8. Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, avem $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \geq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

GEOMETRIE

Capitolul 1
PUNCTE COLINIARE. PUNCTE COPLANARE

A. Metode de demonstrare a coliniarității

1. Dacă punctele distincte $A_1, A_2, ..., A_n$, $n \geq 3$, se află simultan în planele distincte α și β, atunci ele sunt coliniare.

2. Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, atunci proiecțiile lor pe un plan sunt coliniare și reciproc.

3. Dacă dreptele AB, BC, CA sunt paralele cu *o* aceeași dreaptă d, atunci punctele A, B, C sunt coliniare.

4. Teorema lui Desargues

Fie punctele necoliniare A, B, C și un punct O nesituat în planul (ABC). Fie punctele A', B', C' situate pe dreptele OA, OB, respectiv OC și diferite de punctele O, A, B, C. Fie $BC \cap B'C' = \{A_1\}$, $AC \cap A'C' = \{B_1\}$ și $AB \cap A'B' = \{C_1\}$. Atunci punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare (figura 1).

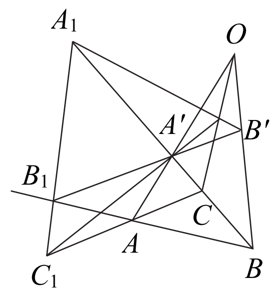

Fig.1

B. Metode de demonstrare a coplanarității

Teorema lui Menelaus în spațiu

Fie tetraedrul $ABCD$. Un plan α intersectează muchiile (AB), (BC), (CD), (DA) respectiv în punctele M, N, P, Q. Atunci are loc relația: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$, (1).

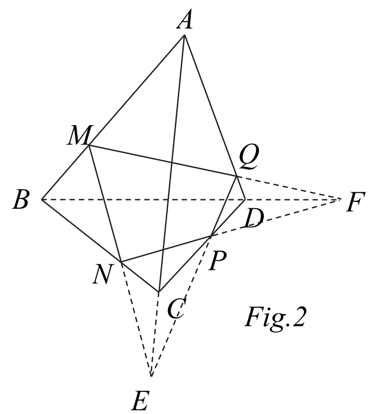

Fig.2

Demonstrație. Luăm doar cazul în care planul α nu este paralel nici cu BD, nici cu AC (figura 2). Fie $MN \cap AC \cap QP = \{E\}$ și $MQ \cap BD \cap PN = \{F\}$. Luând triunghiul ABC și transversala MNE, respectiv triunghiul ACD și transversala QPE, avem: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$ și $\frac{EA}{EC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$. Prin înmulțire rezultă relația (1).

1. Reciproca teoremei lui Menelaus

Fie tetraedrul $ABCD$ și punctele M, N, P, Q pe muchiile (AB), (BC), (CD), respectiv (DA). Dacă are loc relația (1), atunci punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

2. Dacă dreptele AB, AC, AD sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă d, atunci punctele A, B, C, D sunt coplanare (figura 3) și (figura 4).

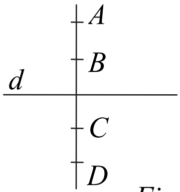

Fig.3

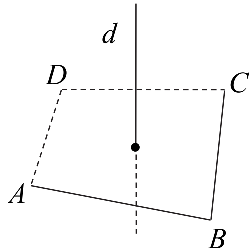

Fig.4

3. Dacă punctele A_1, A_2, ..., A_n, $n \geq 4$, sunt de aceeași parte a planului α, la distanțe egale față de planul α ($A_1B_1 = A_2B_2 = ...\ A_nB_n$), atunci punctele A_1, A_2, ..., A_n sunt coplanare (figura 5).

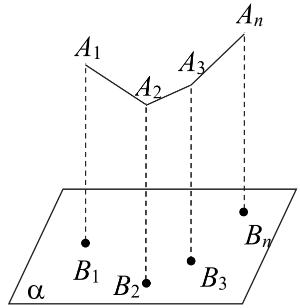

Fig.5

Probleme propuse

1. Fie prisma $ABCA'B'C'$ și fie punctele M, N, P pe muchiile laterale (AA'), (BB'), (CC') astfel încât segmentele (AM), (BN), (CP) au lungimi diferite. Demonstrați că AB și MN, BC și NP, respectiv CA și PM se intersectează în trei puncte D, E, F coliniare.

2. Fie piramida $VABCD$ cu vârful V și fie $AC \cap BD = \{O\}$. Fie un punct $M \in (VO)$ și fie punctele $A' \in (VA)$, $B' \in (VB)$, $C' \in (CV)$, $D' \in (VD)$ astfel încât $A'C' \cap B'D' = \{M\}$. Demonstrați că se obțin 6 puncte coliniare prin intersecția dreptelor AB și $A'B'$, BC și $B'C'$, CD și $C'D'$, DA și $D'A'$, AC și $A'C'$, respectiv BD și $B'D'$.

3. Fie planele distincte $\alpha = (O, d_1)$ și $\beta = (O, d_2)$. Fie $\alpha \cap d_2 = \{A\}$, $\beta \cap d_1 = \{B\}$. Demonstrați că punctele O, A, B sunt coliniare.

4. Fie dreptele d_1, d_2, d_3 necoplanare, astfel încât $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{O\}$ și planele paralele α, β, γ care nu conțin punctul O și care intersectează cele trei drepte. Demonstrați că:

a) se obțin trei triunghiuri asemenea;

b) centrele de greutate ale celor trei triunghiuri sunt coliniare;

c) centrele cercurilor circumscrise celor trei triunghiuri sunt coliniare.

5. Fie punctele M, N, P pe muchiile (AB), (BC), (CD) ale tetraedrului $ABCD$, astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$, $\frac{NB}{NC} = \frac{2}{3}$, $\frac{PC}{PD} = 3$. Determinați poziția punctului Q pe muchia (DA), știind că M, N, P, Q sunt coplanare.

6. Fie piramida $VA_1A_2...A_n$, $n \geq 4$, cu vârful V. Demonstrați că centrele de greutate ale tuturor fețelor laterale ale piramidei sunt puncte coplanare.

Capitolul 6
PIRAMIDA

1. Fie tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ și un punct M în spațiu. Fie G centrul de greutate al tetraedrului. Demonstrați că:

$$MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + MA_4^2 = 4MG^2 + GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2 + GA_4^2 .$$

2. Fie tetraedrul $ABCD$ și fie punctele $E \in (AB$, $F \in (BC$, $G \in (CD$, $H \in (AD$ astfel încât $AE = k \cdot AB$, $BF = l \cdot BC$, $CG = m \cdot CD$, $DH = n \cdot DA$. Demonstrați că:

$$\mathcal{V}_{EFGH} = klmn \cdot \mathcal{V}_{ABCD}.$$

3. În tetraedrul $ABCD$ se consideră înălțimile h_a, h_b, h_c, h_d și a, b, c, d distanțele de la un punct M interior tetraedrului la fețele pe care sunt perpendiculare înălțimile a, b, c, respectiv D. Demonstrați că $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} + \frac{d}{h_d} = 1$.

4. Fie h_1, h_2, h_3, h_4 înălțimile unui tetraedru și fie r raza sferei înscrise în tetraedru. Demonstrați că $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{1}{r}$.

5. Fie tetraedrul $VABC$ și fie punctele $G \in (AV$, $E \in (CA$, $F \in (AB$, $D \in (BC$, astfel încât $\frac{CD}{BC} = \frac{AE}{CA} = \frac{BF}{AB} = \frac{AG}{AV} = m$, $m > 1$. Determinați raportul $r = \frac{\mathcal{V}_{DEFG}}{\mathcal{V}_{VABC}}$ în funcție de m.

6. Pe muchiile tetraedrului regulat $ABCD$, care trec prin A, se consideră punctele M, N, P astfel încât $AM = m$, $AN = n$, $AP = p$. Demonstrați că dacă d este distanța de la A la planul (MNP), atunci $\frac{1}{d^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}\right) - \left(\frac{1}{mn} + \frac{1}{mp} + \frac{1}{np}\right)$.

7. Fie piramida $OABCD$ cu baza $ABCD$ patrulater inscriptibil.

a) Demonstrați că $OA^2 \cdot BC \cdot CD \cdot DB + OC^2 \cdot DA \cdot AB \cdot BD = OB^2 \cdot CD \cdot DA \cdot AC +$ $+ OD^2 \cdot AB \cdot BC \cdot CA$.

b) Demonstrați două teoreme ale lui Ptolemeu (privind patrulaterul inscriptibil) pornind de la relația de la punctul a).

8. Într-un punct oarecare M al bazei piramidei regulate $VA_1A_2A_3...A_n$, $n \geq 3$, se duce o dreaptă perpendiculară pe planul bazei $A_1A_2...A_n$, care intersectează planele fețelor laterale în punctele B_1, B_2, …, B_n. Demonstrați că suma $MB_1 + MB_2 + … + MB_n$ este constantă indiferent de poziția punctului M, O fiind proiecția lui V pe planul bazei.

9. Fie piramida regulată $VA_1A_2...A_n$, $n \geq 3$, și $\alpha = \sphericalangle((VA_1A_2), (VA_2A_3))$, unde $A_1A_2 = a$, $VA_1 = m$, . Determinați:

a) $\cos\frac{\alpha}{2}$ în raport cu a, m, n;

b) $\cos\frac{\alpha}{2}$ pentru $n \in \{3, 4, 6\}$.

10. Demonstrați că există un tetraedru cu toate fețele triunghiuri dreptunghice. Este posibil ca trei din fețele tetraedrului să aibă unghiul drept în același vârf?

11. Fie tetraedrul regulat $ABCD$ și fie punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in$ $\in (DA)$ astfel încât $AM = BN = CP = DQ$. Fie O mijlocul lui (NQ). Demonstrați că $NQ \perp (MOP)$.

12. Fie tetraedrul $ABCD$ și mijloacele M, N, P ale muchiilor (BC), (CD), (DB). Știind că $AB = AC = AD$ și că $AM \perp AN$, demonstrați că $AP \perp (AMN)$.

13. Fie tetraedrul $ABCD$ în care $AD \perp BC$ și $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$. Demonstrați că $AB = AC$.

14. Fie tetraedrul $ABCD$ cu $AD \perp (BCD)$ și fie E și F proiecțiile lui D pe AB și AC. Demonstrați că:

a) $\dfrac{EB}{EA} \cdot \dfrac{FC}{FA} = 1 \Leftrightarrow BD^2 + CD^2 = AD^2$;

b) există un punct $O \in (BCD)$ astfel încât $OB = OC = OD = OE = OF$.

15. Un triunghi ascuțitunghic se îndoaie de-*a* lungul liniilor mijlocii până se obține un tetraedru. Demonstrați că o înălțime a tetraedrului trece prin ortocentrul triunghiului dat.

16. Fie tetraedrul echifacial $ABCD$. Fie M mijlocul lui (BC) și punctele $E \in (BD)$, $F \in$ $\in (CD)$ astfel încât sumele $AE + EM$ și $AF + FM$ să fie minime. Demonstrați că $EF \parallel$ $\parallel BC$, iar E, F și centrul de greutate al triunghiului BCD sunt coliniare.

17. Determinați piramidele regulate $VA_1A_2...A_n$, $n \geq 3$, care au toate fețele laterale triunghiuri echilaterale.

18. Demonstrați că tetraedrul în care toate înălțimile sunt congruente și una dintre înălțimi trece prin ortocentrul feței opuse este tetraedru regulat.

19. Fie piramida $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$, iar fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale. Fie E și F mijloacele lui (AB) și (AD). Fie α un plan paralel cu dreapta VC care conține dreapta EF. Fie $\alpha \cap VA = \{G\}$. Demonstrați că $32 \cdot \mathcal{V}_{AEFG} = \mathcal{V}_{VABCD}$.

20. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale fețelor ABC, ACD, ABD ale tetraedrului $ABCD$. Fie un punct $M \in (BCD)$. Demonstrați că $27 \cdot \mathcal{V}_{MG_1G_2G_3} = \mathcal{V}_{ABCD}$.

21. Baza $ABCD$ a piramidei $VABCD$ este paralelogram. Prin mijlocul muchiei (VA) se duce un plan de secțiune paralel cu planul (VBC). Calculați raportul volumelor corpurilor care se formează prin secționare.

22. Printr-un vârf al bazei unei piramide patrulatere regulate se duce un plan perpendicular pe muchia opusă. Raportul dintre aria secțiunii obținute și aria bazei este $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Aflați raportul dintre înălțimea piramidei și muchia laterală.

23. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei a, iar muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri de măsură 30°. Aflați aria secțiunii făcută în piramidă de un plan ce trece prin mijloacele laturilor (AB) și (AD) și care este perpendicular pe VC.

Capitolul 10
INEGALITĂȚI GEOMETRICE

1. Fie punctele $A \in (Ox$, $B \in (Oy$, $C \in (Oz$ perpendiculare două câte două. Demonstrați că triunghiul ABC este ascuțitunghic.

2. Fie (AB) și (CD) două segmente necoplanare având mijloacele M și N. Demonstrați că: $AD + BC > 2MN$.

3. Fie tetraedrul $OABC$. Demonstrați că $m(\sphericalangle AOB) < m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle BOC)$.

4. Fie M și N puncte interioare tetraedrului regulat $ABCD$. Demonstrați că $m(\sphericalangle MAN) < 60°$.

5. Fie tetraedrul $OABC$. Demonstrați că $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COA) < 360°$.

6. Fie tetraedrul $ABCD$ în care $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle BDC) = m(\sphericalangle CDA) =$ $= 60°$, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$, $b > a$. Demonstrați că $c < a < \frac{b}{2}$.

7. Fie dreapta d și punctul A conținute în planul α. Fie $B \notin \alpha$. Fie a și b distanțele de la A la dreapta d, iar c distanța dintre proiecțiile pe d ale punctelor A și B. Demonstrați că pentru orice punct $M \in d$ avem $MC + MD \geq \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$.

8. Fie tetraedrul $OABC$ tridreptunghic în O și M un punct în interiorul triunghiului ABC. Dacă N, P, Q sunt proiecțiile lui M pe fețele (OBC), (OAC), (OAB), demonstrați că $\frac{OA}{MN} + \frac{OB}{MP} + \frac{OC}{MQ} \geq 9$.

9. Fie tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ și un punct M în interiorul său. Fie d_1, d_2, d_3, d_4 distanțele de la M la cele patru fețe și $h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq h_4$ cele patru înălțimi. Demonstrați că $\sum_{i=1}^{4} \frac{d_i}{h_i} = 1$; $h_1 \leq d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq h_4$.

10. Fie un punct M în interiorul tetraedrului $ABCD$. Dreptele AM, BM, CM, DM taie fețele BCD, ACD, ABD, ABC în punctele A', B', C', D'. Demonstrați că:

a) $\frac{AA'}{MA'} + \frac{BB'}{MB'} + \frac{CC'}{MC'} + \frac{DD'}{MD'} \geq 16$;

b) $\frac{AA'}{MA'} \cdot \frac{BB'}{MB'} \cdot \frac{CC'}{MC'} \cdot \frac{DD'}{MD'} \geq 256$.

11. Fie un paralelipiped dreptunghic cu a, b, c lungimile muchiilor și d lungimea diagonalei. Demonstrați că $3d \geq \sqrt{3}\,(a + b + c)$.

12. Fie un paralelipiped dreptunghic cu a, b, c reprezentând lungimile muchiilor, respectiv a diagonalei. Dacă S este aria totală a paralelipipedului și $a + b + c = 1$, demonstrați că $6d^2 + 3S \geq 4$.

13. Se consideră un tetraedru cu volumul $\mathcal{V}$ și cu lungimile muchiilor a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Demonstrați că $6\mathcal{V} < \sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$.

14. Lungimea muchiei laterale a unei piramide triunghiulare regulate este a. Dacă $\mathcal{V}$ este volumul piramidei, demonstrați că $6\mathcal{V} < \pi a^3$.

15. Fie V și S volumul și aria totală a unui con circular drept. În ce condiții avem:

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \geq \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^2 ?$$

16. Demonstrați că suma distanțelor vârfurilor unui tetraedru regulat la centrul sferei circumscrise este mai mică decât suma distanțelor acelorași vârfuri la orice punct din spațiu.

17. Fie M un punct în interiorul tetraedrului regulat $ABCD$. Fie A', B', C', D' simetricele lui M față de planele (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Dacă R este raza sferei circumscrise tetraedrului, demonstrați că $3(A'B' + B'C' + C'D' + D'A') < 16R$.

18. Se consideră un con circular de rază r și înălțime $h > 2r$. Dacă S este aria totală a unui cilindru circular drept înscris în con, demonstrați că $2(h - r)S < \pi r h^2$.

19. Demonstrați că aria totală a oricărui con circumscris unei sfere este cel puțin egală cu dublul ariei sferei.

20. Demonstrați că volumul oricărui con circumscris unei sfere este cel puțin egal cu dublul volumului sferei.

21. Fie o piramidă având baza un poligon regulat cu n laturi. Fie α, β, γ unghiul făcut de o muchie laterală cu planul bazei, unghiul făcut de o față laterală cu planul bazei, respectiv unghiul de la baza unei fețe laterale. Determinați n astfel încât $\cos\alpha \geq 2\cos\beta\sin\gamma$.

22. Într-un con având raza R și unghiul de la vârf egal cu $2x$ se duce sfera înscrisă. Se consideră conul având același vârf cu conul inițial și baza secțiunea făcută în primul con prin planul tangent la sfera înscrisă. Se continuă procedeul (de n ori în total). Fie S sumele ariilor fețelor laterale ale tuturor conurilor. Determinați n, știind că $S \leq \frac{64}{63}A$, unde A este aria laterală a primului con.

23. Fie V, s, S volumul, aria laterală și aria totală a unui con. Demonstrați că:

$$9\pi V^2 < \left(\frac{S+s}{3}\right)^3 .$$

PROBLEME-GRILĂ PENTRU CONCURSURI

ALGEBRĂ

1. Fie a, b, $c > 0$, astfel încât $\frac{2}{1+a}+2\cdot\sqrt{\frac{2b}{1+b}}=3$, $\frac{2}{1+b}+2\cdot\sqrt{\frac{2c}{1+c}}=3$ și $\frac{2}{1+c}+$ $+\ 2\cdot\sqrt{\frac{2a}{1+a}}=3$. Suma $a+b+c$ este:

a) 3; b) 6; c) 1; d) 9.

2. Aria triunghiului ale cărui laturi verifică inegalitatea:
$\sqrt{a^2-4a+13}+\sqrt{b^2-2b\sqrt{3}+19}+\sqrt{c^2-2c+26}\le 12$ este:

a) 3; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) 2.

3. Fie a, b, $c > 0$, astfel încât $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\le a+b+c$. Valoarea expresiei:
$E=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ este:

a) 2; b) $\frac{2}{3}$; c) 1; d) $\frac{1}{3}$.

4. Fie a, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a^2+b^2-3a+3b+\frac{17}{4}=0$. Dacă $\max|a+b|=m$, $\max|a^3+b^3|=n$, atunci perechea (m, n) este:

a) (3, 9); b) (2, 8); c) (1, 7); d) (2, 4).

5. Fie a, b, $E \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $a^2+b^2=1$, $E=\frac{a+1}{b+1}+\frac{a+2}{b+2}+\frac{a+3}{b+3}$. Dacă $E=\frac{3a}{b}$, atunci $A=|a|+|b|$ este:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{2}{3}$; c) 1; d) $\sqrt{2}$.

6. Fie $a > 0$ și ecuația $\sqrt{x+a\sqrt{x+a\sqrt{x+...+a\sqrt{x+a\sqrt{(a+1)x}}}}}=x$, unde numărul radicalilor este 10. Dacă m este numărul rădăcinilor ecuației, iar S este suma lor, atunci (m, S) este:

a) $(2, a+1)$; b) $(10, a+1)$; c) (1, 1); d) $(1, a+1)$.

7. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x^2+y^2=2$ și $(x-y)^4-(x+y)^4=8$. Atunci $x\cdot y$ este:

a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}$; d) 2.

8. Numărul soluțiilor reale (x, y, z) ale ecuației $x^2 + y^2 + z^2 + 19 = 4|x-1| + 2|y-2| + 2(x + 2y + 3z)$ este:

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

9. Numărul numerelor $\overline{abcd}$ pentru care avem relația $\frac{d-1}{a} + \frac{d}{b} + \frac{d+1}{c} = 3d$ este:

a) 81; b) 9; c) 100; d) 90.

10. Numărul perechilor (a, b) pentru care orice $x > 0$ avem $\frac{a+x}{b} + \frac{b+x}{a} \le 2 + x(a+b)$, unde $a, b \in (0, 1]$ este:

a) 0; b) 1; c) 2; d) 3.

11. Mulțimea soluțiilor ecuației $\left[\frac{x+1}{2}\right] + \left[\frac{x+2}{4}\right] + \left[\frac{x+4}{8}\right] = 2$ este:

a) $[1, 4]$; b) $\left(\frac{3}{7}, 5\right)$; c) $\left[\frac{4}{7}, 4\right)$; d) $[1, 3]$.

12. Numărul funcțiilor liniare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, cu $m, n \in \mathbb{Z}$, $|m| \le 10$ și $f(xy) = xf(y) + f(x)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, este:

a) 2; b) 20; c) 19; d) 21.

13. Fie $a, b, c > 0$ cu $a + c = 2b$, $c^2 + ac - a^2 = b^2$. Suma $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ este:

a) $2a + b$; b) $a + b + c$; c) 2; d) 3.

14. Numărul tripletelor (a, b, c) de numere reale pentru care $a + b + c = 1$ și $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = abc$ este:

a) 3; b) 1; c) 2; d) 4.

15. Numărul soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 26} + \sqrt{y^4 - 8y^2 + 25} = 8$ este:

a) 2; b) 4; c) 3; d) 1.

16. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcție liniară cu proprietatea că $2f(x) + f(1-x) = 3x - 3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Atunci $f(1) + f(2)$ este:

a) 5; b) 4; c) –2; d) 1.

17. Valoarea maximă a expresiei $E(x) = -4x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 6x + 4$ este:

a) 4; b) $\frac{25}{4}$; c) 3; d) $\frac{9}{4}$.

18. Fie $E(n) = n^2 + n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Dacă $E(n) \cdot E(n+1) = E(m)$, atunci m este:

a) $n^2 + n$; b) $n^2 + n + 1$; c) $(n+1)^2$; d) $n^2 + 2n$.

19. Fie $n \in \mathbb{N}$, $E(n) = n^2 + n + 1$, $F(n) = n^2 - n + 1$. Dacă $F(n) \cdot F(n+1) = E(m)$, atunci m este:

a) $n^2 + n$; b) n^2; c) $n^2 - n$; d) $n^2 + 1$.

20. Fie $n \in \mathbb{N}$. Suma cifrelor numărului prim $a(n) = n^4 - 16n^2 + 100$ este:

a) 8; b) 10; c) 11; d) 12.

SOLUȚII

ALGEBRĂ

Capitolul 1
NUMERE ÎNTREGI

1. Numerele $(a + b)(a + b + 1)$, respectiv $(c + d)(c + d + 1)$ sunt numere pare. Deci există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A = 4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2$. Luăm $x = n + 1$, $y = n - 1$.
2. Din $x(0) = \sqrt{3+m} = a \in \mathbb{N}$, $x(1) = \sqrt{8+m} = b \in \mathbb{N}$, rezultă că $m = a^2 - 3 = b^2 - 8$ și deci $(b - a)(b + a) = 5$. Avem succesiv $b = 3$, $a = 2$, $m = 1$, $x(n) = \sqrt{(2^n+1)^2} = 2^n + 1$.
3. Notăm $\underbrace{111...1}_{n} = a$. Avem $A(n) = 9 \cdot (10^{2n} \cdot a + 4 \cdot 10^n \cdot a + 7a) + 8 = 9a(10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 7)$ + $+ 8 = (10^n - 1)(10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 7) + 8 = 10^{3n} + 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n + 1 = (10^n + 1)^3$. Avem $\sqrt[3]{A(n)} = 10^n + 1$ și suma cerută este 2.
4. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației avem $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}; x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Obținem $b \mid a$, $c \mid a$. Avem următoarele cazuri: I) $x_1 = a$, $x_2 = b$. Egalitatea $a + b = \frac{b}{a}$ este falsă; II) $x_1 = a$, $x_2 = c \Rightarrow$ soluțiile $(a, a^2, 0)$, $(1, c + 1, c)$, $a \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{N}$; III) $x_1 = b$, $x_2 = c \Rightarrow$ soluțiile $(a, 0, 0)$, $(1, b, 0)$, $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}$.
5. Avem $x(y + z) + y(x + z) + z(x + y) = 6 \cdot 2^{2n} + 2^{n+1}(x + y)$. Cum $x + y = 2^{2n+2} - z$; $z + x = 2^{n+2} - y$ și $y + z = 2^{n+2} - x$, obținem $x(2^{n+2} - x) + y(2^{n+2} - y) + z(2^{n+2} - z) = 6 \cdot 2^{2n} + 2^{n+1}x + 2^{n+1}y$, de unde $(2^n - x)^2 + (2^n - y)^2 + (2^{n+1} - z)^2 = 0$ și deci $x = y = 2^n$, $z = 2^{n+1}$. Din $m \cdot 2^{n+1} = 2^{2n} + 2^{2n}$ rezultă $m = 2^n$.
6. Avem $A = m^2(-n - p)^2 + n^2(-m - p)^2 + p^2(- m - n)^2 = 2(m^2n^2 + m^2p^2 + n^2p^2) + 2mnp(m + n + p) =$ $= (m^2 + n^2 + p^2)^2 - A$ și deci $2A = (m^2 + n^2 + p^2)^2$, de unde $x = 2$.
7. Fie $x = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$. Din $4n + 1 \leq 2m + 1 \leq 2n^2 + 1$, rezultă $2n \leq m \leq n^2$. Atunci $S_n =$ $= (4n + 1) + (4n + 3) + ... + (2n^2 + 1) = (1 + 3 + 5 + ... + (2n^2 + 1)) - (1 + 3 + 5 + ... + (4n - 1))$. Folosind formula $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, obținem $S_n = (n^2 - 1)^2$. Din $(n^2 - 1)^2 \leq 1000$ rezultă $n^2 - 1 \leq 31$ și deci $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.
8. Avem $(a^{2^n} - b^{2^n})(a^{2^n} + b^{2^n}) = (a^{2^n})^2 - (b^{2^n})^2 = a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}}$ și atunci $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \cdot$ $\cdot (a^{2^2} + b^{2^2}) \cdot ... \cdot (a^{2^n} + b^{2^n}) = a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}}$. Luând $a = 2$, $b = 1$, obținem $A_n = \frac{2^{2^{n+1}} - 1}{2^{2^{n+1}}} \in (0, 1)$ și $[A_n] = 0$.
9. Perechile $(n, n^2 - 1)$ și $(n^2 - 1, n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ sunt soluții.
10. Avem $b = 2$, c impar prim, sau b impar prim, $c = 2$. Analog avem $e = 2$, d impar prim. Rezultă că numerele $a - 2$, a și $a + 2$ sunt numere impare. Observăm că $a \geq 5$ și că $a = 5$ este soluție. Avem deci soluțiile $(5, 2, 3, 7, 2)$ și $(5, 3, 2, 7, 2)$. Demonstrăm că nu mai avem altă soluție. Dacă $a = 3k + 1$, $k \geq 2$, atunci $a + 2 = 3(k + 1)$ nu este număr prim. Dacă $a = 3k + 2$, $k \geq 2$, atunci $a - 2 = 3k$ nu este număr prim.

11. Din $x(x+1)(x+2) \geq 100$ și $x(x+1)(x+2) \leq 9999$ rezultă $10 \leq x \leq 21$. Avem $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\right]$ și deci suma este $S = \frac{1}{2}\sum_{k=10}^{21}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=10}^{21}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{21} - \frac{1}{11} + \frac{1}{22}\right) = \frac{1}{70}$.

12. Dacă $n \in \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}$, avem $A_n = \varnothing$. Dacă $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 500$ avem $x^4 = 2^{4k} = (2^k)^4$ și deci $A_k = \{\pm 2^k\}$. Cum mulțimile A_k au câte două elemente și sunt disjuncte două câte două, avem card $A = 500 \cdot 2 = 1000$. Suma modulelor este $2 \cdot (2^1 + 2^2 + ... + 2^{500}) = 2^{502} - 2$.

13. Pătratele perfecte sunt de forma $4n$ sau $4n + 1$. Dacă $a = 2n + 1$, $b = 2m + 1$, avem $ab = 4mn + 2(m+n) + 1$. Obținem $A = 4p + 3$. A nu este pătrat perfect; b) Luăm $a = b = c = 3$, $d = 1$ și $B = 6^2$.

14. Notăm $a_n = \underbrace{999...9}_{n\text{ cifre}}$. Avem $a_1 = 3^2$. Notând $a_n = 9 \cdot b_n$, unde $b_n = \underbrace{111...1}_{n\text{ cifre}}$, rezultă că a_n este pătrat perfect dacă și numai dacă b_n este pătrat perfect. Dacă $n = 2 \cdot m$, $m \in \mathbb{N}^*$, avem $(10^m - 1)^2 < a_n < 10^n$ și a_n nu este pătrat perfect. Fie $n = 2m + 1$. Dacă $b_n = c_n^2$, atunci ultima cifră a lui c_n este 1 sau 9, iar penultima cifră a lui b_n este cifră pară. Deci b_n nu poate fi pătrat perfect.

15. Avem $A = (2-1)(2+1)(3-1)(3+1) \cdot ... \cdot (99-1)(99+1) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 98)(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 100) = 2 \cdot 99 \cdot 100 \cdot (3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 98)^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 10^2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot ... \cdot 98)^2$. Atunci a este element de forma 2; $2 \cdot 3^2$; $2 \cdot 10^2$; $2 \cdot 3^2 \cdot 10^2$; $2k^2$, $2 \cdot (3k)$; $2 \cdot (10k)^2$; $2 \cdot (30k)^2$, unde $3 \leq k \leq 98$. Avem deci cel puțin $4 + (98 - 2) - 32 - 3 - 2 = 351$ numere.

16. Primii 4 termeni ai șirului sunt $16 \cdot 1$; $16 \cdot 2$; $16 \cdot 3$; $16 \cdot 4$; a) Al 100-lea termen al șirului este 1600; b) Suma cerută este $16 \cdot (1 + 2 + ... + 100) = 80800$.

17. Avem $A = (2^{100} - 1) + [(2^{100})^2 - 1] + [(2^{100})^3 - 1] + ... + [(2^{100})^{100} - 1] + 100$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ restul împărțirii numărului $(2^{100})^n - 1$ la a este 0. Restul împărțirii lui A la a este 100.

18. Avem $9! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. Obținem ecuația $(9!)^{n-1} = 2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot ... \cdot 9^8$. Luând exponenții lui 7 din cei doi membri, avem $n - 1 = 6$ și deci $n = 7$.

19. Fie $a = dm$, $b = dn$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$. Obținem $d(m+n) = 4(m-n)$ și atunci $d \in \{1, 2, 3\}$. Dacă $d = 1$, rezultă $3m = 5$n și deci $m = 5$, $n = 3$. Pentru $d = 2$ avem $m = 3$, $n = 1$, iar pentru $d = 3$ avem $m = 5$, $n = 1$.

20. Nu putem avea $7 \in A$ sau $7 \in B$. „Scoțând” elementul 7 putem lua $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{8, 9, 10\}$.

21. Avem $p = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$. Rezultă că $a^2 + b^2 - ab = 1$ și $a^2 + b^2 + ab = p$. Atunci $a^2 + b^2 = \frac{p+1}{2}$, $2ab = p - 1$. Obținem $(a+b)^2 = \frac{3p-1}{2}$, $(a-b)^2 = \frac{3-p}{2}$. Convine doar $p = 3$ și avem $a = b = 1$, $|a + b - 2| = 0$.

22. Notăm cu i și p cifra din șir care este impară, respectiv pară. Se constată că șirul este de forma (i, i, i, i, p), secvențele având în continuare această formă. Rezultă că cifrele pare apar din 5 în 5 termeni consecutivi și primele 3 secvențe nu pot apare în șir. Fie $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Atunci $(i, i, i, i) \in A \times A \times A \times A = B$. Cum B are $5^4 = 625$ elemente, șirul dat este periodic. Fie secvența (i_1, i_2, i_3, i_4) care se repetă. Șirul fiind periodic se repetă și secvența $2 + 9 + 7 + 5$. Cum ultima cifră a sumei $p + 1 + 9 + 7$ este 5, rezultă că $p = 8$. Apare secvența (8, 1, 9, 7, 5).

23. Avem 51 exponenți din care n exponenți, $0 \leq n \leq 51$ sunt pari și $51 - n$ sunt impari. Atunci avem $S = n \cdot 1 + (51 - n)(-1) = 2n - 51$. Deci rezultă că $A = \{-51, -49, -47, ..., -1, 1, 3, ..., 51\}$. Suma cerută este $2 \cdot (1 + 3 + 5 + ... + 51) = 2 \cdot 25^2 = 1350$.

24. Notăm numerele cu x, $x + a$, $x + b$, unde $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$. Din condiția din enunț obținem $a^2 + b^2 = ab + 3$, care are ca soluție de exemplu $a = 1$, $b = 2$. Numărul soluțiilor $(x, x+1, x+2)$ este infinit.

CUPRINS