1. Mulțimi. Submulțimi. Operații cu mulțimi

1.1. Noțiunea de mulțime

Noțiunea de mulțime face parte din categoria noțiunilor primare, care nu se definesc ci doar se descriu. Totuși prin mulțime putem înțelege o colecție de obiecte grupate pe baza anumitor proprietăți comune. De asemenea, și noțiunea de apartenență (relația de a fi element al unei mulțimi) este o noțiune primară.

Mulțimile se notează cu litere mari sau cu litere speciale în cazul unor mulțimi consacrate.

Exemple:

- Mulțimea culorilor curcubeului; mulțimea creioanelor colorate din penar; mulțimea animalelor din curtea bunicii.
- Mulțimi de litere: mulțimea literelor care alcătuiesc cuvântul matematică
$$A = \{\mathrm{m, a, t, e, i, c, ă}\}.$$
- Mulțimi de numere: mulțimea cifrelor: $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; mulțimea numerelor naturale de la 0 la 100: $C = \{0,1,2, \dots ,100\}$; mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$.

Spunem că un element aparține unui mulțimi dacă se află printre elementele mulțimii.

Exemple:

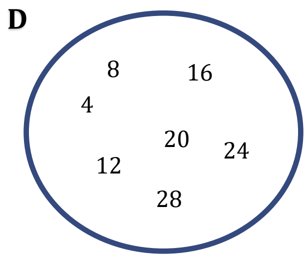
- Roșu este o culoare a curcubeului; creionul galben se află în penar; găina este un animal din curtea bunicii.
- $m \in A$, mulțimea literelor care alcătuiesc cuvântul matematică conține litera m.
- $5 \in B$, 5 este cifră.
- $52 \in \mathbb{N}$.
- $2022 \notin C$. Elementul 2022 nu aparține mulțimii numerelor naturale de la 0 la 100.

Mulțimile pot fi reprezentate în trei moduri

- Cu ajutorul diagramelor Venn-Euler;
- Prin enumerarea elementelor mulțimii;
- Cu ajutorul proprietății caracteristice a elementelor sale.

Exemplu:

Diagrama Venn-Euler



Enumerarea elementelor

$D = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$.

Folosind proprietatea caracteristică

$D = \{x = 4k | k \leq 7, k \in \mathbb{N}^*\}$.

Definiție: Numim ***cardinalul*** unei mulțimi finite este numărul elementelor mulțimii. Notăm cardinalul mulțimii A cu $card\ A$ sau $|A|$.

Exemplu:

În exemplul anterior cardinalul mulțimii D este $card\ D = 7$.

Definiție: Mulțimile care nu sunt finite se numesc infinite.

Definiție: Mulțimea fără nici un element poartă numele de ***mulțimea vidă*** și se notează cu $\emptyset$. Mulțimea vidă are cardinalul nul. ($card\ \emptyset = 0$)

Definiție: Două mulțimi se numesc ***echipotente*** dacă au cardinalele egale. Se notează $A \sim B$.

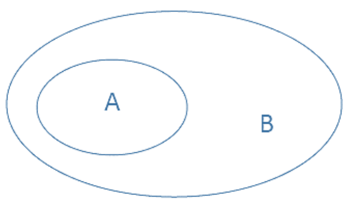
Exemplu:

Mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*, k \leq 5\}$ și $B = \{0,1,2,3,4\}$ sunt echipotente, deoarece a cardinalul egal cu 5.

1.2. Relații între mulțimi

Există două tipuri de relații între mulțimi: egalitatea și incluziunea.

Definiție: Spunem că mulțimea A este ***inclusă*** în mulțimea B și notăm $A \subseteq B$, dacă orice element din mulțimea A este element al mulțimii B. În acest caz, spunem că A este submulțime a lui B.



$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A \rightarrow a \in B.$$

Exemplu:

Mulțimea $A = \{2, 4, 6\}$ este inclusă în mulțimea $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Scriem $A \subseteq B$ sau

$$\{2, 4, 6\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Proprietățile relației de incluziune

1. Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi $\emptyset \subseteq A, \forall A$.
2. Reflexivitate: orice mulțime este submulțime a sa $A \subseteq A, \forall A$.
3. Tranzitivitate: dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq C$, atunci $A \subseteq C$.

Definiție: Spunem că mulțimea A este ***egală*** cu mulțimea B dacă și numai dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

Altfel spus, două mulțimi sunt egale dacă au aceleași elementele.

Exemplu:

Mulțimile $A = \{x = 3k + 1 | k \in \mathbb{N}, k \leq 4\}$ și $B = \{y = 3p - 2 | p \in \mathbb{N}^*, p \leq 5\}$ sunt egale, deoarece $A = \{1, 4, 7, 10, 13\}$ și $B = \{1, 4, 7, 10, 13\}$.

Proprietățile relației de egalitate:

1. Reflexivitate: $A = A, \forall A$.
2. Simetrie: dacă $A = B$, atunci $B = A$.
3. Tranzitivitate: dacă $A = B$ și $B = C$, atunci $A = C$.

Definiție: Mulțimea submulțimilor lui A se numește ***mulțimea părților lui A*** și se notează cu $\mathcal{P}(A)$.

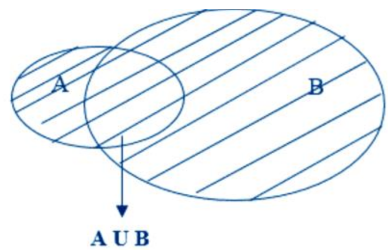
Exemplu:

Dacă $A = 0,1,2$, atunci $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$.

1.3. Operații cu mulțimi

Definiție: ***Reuniunea*** a două mulțimi este mulțimea formată din toate elementele celor două mulțimi scrise o singură dată. Notăm reuniunea dintre mulțimile A și B cu $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A \, și \, x \in B\}.$$

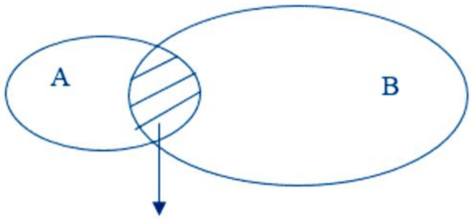


Exemplu:

Dacă $A = \{1,2,4,6,7\}$ și $B = \{0,1,4,6,8,9,10\}$, atunci $A \cup B = \{0,1,2,4,6,7,8,9,10\}$.

Definiție*: *Intersecția a două mulțimi este mulțimea elementelor comune. Notăm intersecția dintre mulțimile A și B cu $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x | x \in A \; sau \; x \in B\}.$$



A ∩ B

Exemplu:

Dacă $A = \{1,2,4,6,7\}$ și $B = \{0,1,4,6,8,9,10\}$, atunci $A \cap B = \{1,4,6\}$.

Definiție*:** Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc mulțimi ***disjuncte.

Exemplu:

Mulțimile $A = \{1,5,7\}$ și $B = \{0,4,8\}$ sunt disjuncte.

Propoziția 1.1: *Fie mulțimile A, B și C. Atunci au loc relațiile:*

i. $A \subseteq A \cup B; B \subseteq A \cup B$;

ii. $A \cap B \subseteq A; A \cap B \subseteq B$;

iii. $A \cap \emptyset = \emptyset; A \cup \emptyset = A;$

iv. *Reflexivitatea:* $A \cap A = A; A \cup A = A;$

v. *Comutativitatea:* $A \cup B = B \cup A;\; A \cap B = B \cap A$;

vi. *Asociativitatea:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);\; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$

vii. *Distributivitatea*

a. *Reuniunii față de intersecție:*

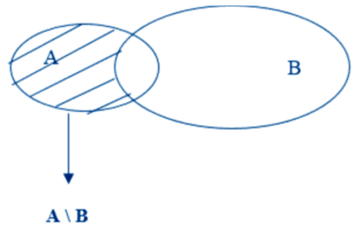
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);\; (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

b. *Intersecției față de reuniune:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

Definiție: Mulțimea tuturor submulțimilor disjuncte ale unei mulțimi A se numește ***partiție*** a mulțimii A.

Definiție: ***Diferența*** a două mulțimi este mulțimea formată din elementele care se află în prima mulțime, dar nu se află în a doua. Notăm diferența dintre mulțimile A și B cu $A - B$ sau $A \setminus B$.



$$A - B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Exemplu:

Dacă $A = \{1,2,4,6,7\}$ și $B = \{0,1,4,6,8,9,10\}$, atunci $A - B = \{2,7\}$ și $B - A = \{0,8,9,10\}$.

Observăm că $A - B \neq B - A$.

Propoziția 1.2: *Fie mulțimile A, B și C. Atunci au loc relațiile:*

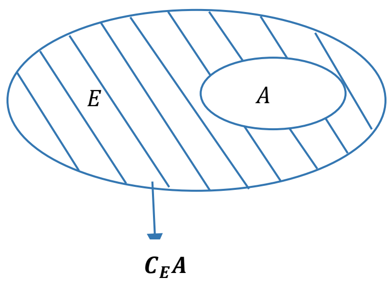
i. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$;

ii. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

iii. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$; $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

Definiție: Pentru $A \subseteq E$, numim ***complementara*** mulțimii A mulțimea $E - A$, notată cu $C_E A$.

$$C_E A = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\} = E - A.$$



Propoziția 1.3: *Fie $A, B \subseteq E$. Atunci au loc relațiile:*

i. $A \cup C_E A = E$;

ii. $A \cap C_E A = \emptyset$;

iii. *Relațiile lui De Morgan*

$$C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B);$$
$$C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B);$$

Definiție: Pentru mulțimile A și B, definim ***diferența simetrică***

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$