

PROBLEME ALESE
DE MATEMATICĂ
pentru licee

În timp ce prima ediție a acestei lucrări se afla sub tipar ne-a părăsit profesorul CONSTANTIN IONESCU-ȚIU, care timp de jumătate de secol a slujit cu credință Gazeta Matematică și care a avut o contribuție hotărâtoare la această lucrare.

Ne-a părăsit, de asemenea, academicianul CAIUS IACOB, care cu dragostea lui permanentă pentru școala românească a susținut cu entuziasm și căldură munca noastră.

Memoriei lor luminoase fie-le dedicată această carte.

Prof. univ. dr. ing. Mihail Popescu
București, 12 noiembrie 1992

Prof. CONSTANTIN IONESCU - ȚIU
Prof. univ. dr. MIHAIL POPESCU

PROBLEME ALESE de MATEMATICĂ

**Geometrie, trigonometrie, algebră,
analiză matematică, probabilități**

– pentru licee –

*Ediția a III-a
revizuită și completată*

Vol. 1 (Cap. 1–5)

Cuvânt înainte
Prof. univ. dr. Radu Gologan



EDITURA UNIVERSITARĂ
București, 2014

Control științific: Conf. univ. dr. Valeriu Zevedei
Redactor: Prof. univ. dr. ing. Mihail Popescu
Tehnoredactor: Ion Costache, Ameluța Vișan
Desene: Laurențiu Iliescu, Ion Costache
Coperta: Ion Costache

Editură recunoscută de Consiliul Național al Cercetării Științifice (C.N.C.S.) și inclusă de Consiliul Național de Atestare a Titlurilor, Diplomelor și Certificatelor Universitare (C.N.A.T.D.C.U.) în categoria editurilor de prestigiu recunoscut.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
IONESCU ȚIU, CONSTANTIN

Probleme de matematică alese pentru liceu / Constantin Ionescu

Țiu, Mihail Popescu. - București : Editura Universitară, 2014

2 vol.

ISBN 978-606-591-933-4

Vol. 1. - ISBN 978-606-591-932-7

I. Popescu, Mihail

51(075.35)(076)

DOI: (Digital Object Identifier): 10.5682/9786065919327

Ediția I, Editura Tehnică, 1994
Ediția a II-a, Editura Tehnică, 2003
Ediția a III-a, Editura Universitară, 2014

© Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate, nicio parte din această lucrare nu poate fi copiată fără acordul Editurii Universitare

Copyright © 2014
Editura Universitară
Director: Vasile Muscalu
B-dul. N. Bălcescu nr. 27-33, Sector 1, București
Tel.: 021 – 315.32.47 / 319.67.27
www.editurauniversitara.ro
e-mail: redactia@editurauniversitara.ro

Distribuție: tel.: 021-315.32.47 / 319.67.27 / 0744 EDITOR / 07217 CARTE
comenzi@editurauniversitara.ro
O.P. 15, C.P. 35, București
www.editurauniversitara.ro

CUVÂNT ÎNAINTE

la ediția a treia

Iată o culegere de probleme de matematică ce conține peste 2000 de mici rezultate matematice din toate domeniile matematicii școlare, cu un succes neașteptat peste ani, ajunsă la a treia ediție.

Autorul, doctor inginer de profesie, a rămas de-a lungul timpului un mare iubitor al matematicii școlare și a strâns, cu răbdare, problemele de matematică cele mai frumoase și cele mai utile pregătiri matematice, din ultima jumătate de secol și uneori mai mult.

Un număr însemnat dintre aceste probleme, publicate în Gazeta Matematică au ca autor pe prof. C. Ionescu-Țiu, stâlp al Gazetei Matematice în perioada 1950–1990.

Influența acestuia asupra educației matematice a fost extrem de benefică și a susținut în timp acel titlu de excelență acordat în lume școlii matematice românești.

Lucrarea este excelent alcătuită, problemele gradat alese și sunt convins că tinerii ce se vor apleca asupra textului cu răbdare și pasiune vor putea accede în timp la vârfurile științei, nu numai matematice.

Închei remarcând valoarea istorică a lucrării ca un compendiu al problemelor Gazetei Matematice, revistă românească ce iată, străbate cel de-al treilea secol de existență

**Prof. univ. dr. Radu Gologan
Președintele Societății de Științe
Matematice din România**

București, Decembrie, 2013

**În anul 2012 s-au împlinit
100 de ani de la nașterea
marelui matematician român
Acad. Caius Iacob**

PREFAȚĂ

la ediția a treia

Ediția precedentă a cărții, fiind publicată în 500 de exemplare, s-a epuizat foarte repede din librării.

Ediția de față, a treia, cuprinde peste 2000 de probleme complet rezolvate, multe dintre ele fiind alese dintre cele publicate în ultimii 10 ani de la ediția precedentă.

În recenzia cărții care a apărut în Gazeta Matematică, seria A, nr. 3 din anul 1998 Prof. univ. N. N. Mihăileanu de la Facultatea de Matematică din București făcea următoarele aprecieri:

„Această culegere cuprinde foarte multe probleme, mare parte din ele având autori români, ele constituind o contribuție importantă în domeniul matematicii de liceu.

O altă caracteristică importantă a cărții este faptul că toate problemele sunt rezolvate complet și cu deosebită acuratețe.

În ce privește problema 9.123 propusă de Prof. Mihail Popescu, ea pune în evidență cunoștințele foarte specializate de teoria cuadricelor ale autorului, deși nu se încadrează în programa analitică a matematicii de liceu.

Cu plăcută surpriză constat că deși Prof. Mihail Popescu este inginer, el este „de-ai noștri”, și privesc cu invidie generalizările atât de izbutite și variate date la mai multe probleme de geometrie”.

Cartea având peste 1000 de pagini s-a impus publicarea ei în două volume și anume: Vol. 1 (cap 1–5) și Vol. 2 (cap 6–9)**.*

**Prof. univ. dr. Mihail Popescu
Facultatea de Construcții
Universitatea Ovidius din Constanța**

București, 28 Octombrie, 2013

* Menționăm următoarele 11 probleme din carte: 1.78, 1.221, 1.353, 1.431, 1.433, 4.99, 4.330, 9.1, 9.4, 9.106, 9.123, care prezintă o anumită semnificație în activitatea autorului din domeniul matematicii.

** O culegere asemănătoare de probleme de matematică pentru licee a fost publicată în anul 1901: I. Ionescu, G. Țițeica, A. Ioachimescu, V. Cristescu: Culegere de probleme de aritmetică, geometrie, algebră și trigonometrie, Editura Gazetei Matematice, București, 1901.

PREFAȚĂ

la ediția a doua

Prima ediție a acestei cărți, deși a fost publicată în 15 000 de exemplare, s-a epuizat repede din librării, iar în momentul de față, după opt ani, nu se găsește nici în anticariate.

Având o prezentare elogioasă a academicianului Caius Iacob, cartea a fost primită cu mare interes de către elevii și profesorii de liceu.

Am avut posibilitatea, cu ajutorul colegilor mei, profesori de matematică, să prezint elevilor de la câteva licee din București și din țară această culegere de probleme.

Deoarece cartea acoperă toată programa analitică a matematicii care se predă în licee, am constatat cu satisfacție marele interes pe care l-au arătat elevii față de această culegere, care prezintă un așa de mare număr de probleme, toate însoțite de figuri și soluții complete.

Pe de altă parte însă, este bine cunoscut faptul că elevii își îndreaptă atenția în primul rând asupra cărților recomandate de profesorii lor.

Pentru ca această carte să ajungă mai repede la elevi, ar trebui poate să spun că ea se adresează în primul rând ... profesorilor de matematică!

În tot cazul, având experiența și altei culegeri de probleme de matematică pentru licee, publicată în anul 1997, adresându-mă aici elevilor de liceu, le pot mărturisi că în această carte am căutat să surprind frumusețea matematicii, acolo unde este ea, alegând dintre problemele mai grele sau mai ușoare întâlnite, pe cele care imprimă parcă spiritului uman un pic de îndrăzneală în ... „lupta cu imposibilul”.

Și într-adevăr, de multe ori, cei care sunt puși să rezolve o problemă de matematică, de fapt ca și în problemele de viață, au de ales între „totul sau nimic”.

Din acest punct de vedere matematica are un loc aparte, care, într-o lume răvășită de atâtea probleme, poate fi un izvor de satisfacții spirituale și o rază de speranță.

Pe de altă parte însă, matematica este o materie între multe altele, pe care elevul trebuie s-o parcurgă și să și-o însușească, începând cu școala generală și până la terminarea liceului.

Pus în această situație elevul, avându-l alături pe profesorul de matematică, are de ales parcă între prietenia cu o „matematică frumoasă și atrăgătoare”, sau lupta cu un adversar pe care încearcă să-l înfrângă, fără să-și dea seama că acesta n-a fost învins niciodată de cei care mai întâi nu i-au fost prieteni.

Cartea conține 1900 probleme, cu 550 în plus față de ediția întâi, plasate în capitolele 1 ÷ 7 în paragraful „probleme de sinteză” și în capitolele 8 și 9 în „Secțiunea B”, și acoperă întreg domeniul matematicii de liceu: Geometrie, Trigonometrie, Algebră și Analiză Matematică.

Cartea se adresează în egală măsură atât elevilor care doresc să aprofundeze cunoștințele de matematică însușite în școală, cât și elevilor care se pregătesc pentru concursuri de admitere în învățământul superior și olimpiade de matematică.

Problemele cuprinse în carte sunt însoțite de figuri și soluții complete, și oferă elevilor posibilitatea nu numai să-și însușească diferite metode de rezolvare², ci mai ales posibilitatea de a-și forma chiar un stil propriu de rezolvare a unor probleme de matematică, cu grade de dificultate diferite.

Ca și la ediția întâi, îmi exprim speranța, că dacă cei care vor citi această carte și vor reuși să înțeleagă și să-și însușească metodele de rezolvare, chiar și numai pentru o parte din problemele prezentate, dacă modul de selecționare a problemelor și de rezolvare a lor prin metode cât mai simple și directe va stimula dragostea pentru matematică, atunci putem considera că lucrarea de față și-a atins scopul.

**Profesor universitar
Mihail Popescu
Facultatea de Construcții
Universitatea Ovidius din Constanța**

București, 12 noiembrie, 2002

CUVÂNT ÎNAINTE

la ediția întâi

Matematicii i se rezervă acum, în acest sfârșit de secol și de mileniu, un rol esențial în învățământul liceal. Ea este considerată, pe drept cuvânt, datorită virtuților ei educative, ca un element de cultură generală absolut necesar în orice domeniu de activitate umană, ca un auxiliar prețios pentru formarea unei gândiri corecte, consecvente, care mărește puterea de pătrundere și de analiză a spiritului uman în orice domeniu de activitate.

Dar însușirea de către elev a abilității necesare pentru rezolvarea diverselor probleme matematice nu este deloc ușoară.

Ea reclamă o muncă susținută, temeinică, tenace, în vederea asimilării cunoștințelor primite la școală, ea cere rezolvarea de numeroase exerciții, probleme și aplicații, elevul urmând a lămuri cu creionul în mână fiecare amănunt, fiecare implicație logică și adâncind mereu noțiunile de bază. După o astfel de muncă, pe nesimțite, vâlul care-l înconjoară se destramă și o perspectivă admirabilă i se deschide. Matematica îi va apărea în toată măreția ei și ea îi va oferi acea cheie minunată cu ajutorul căreia va putea deschide larg porțile diverselor științe ale naturii sau ale disciplinelor tehnice. Pentru tânărul dornic să ajungă la acest stadiu, un auxiliar prețios se impune. Acesta este constituit de obicei de o bună culegere de probleme care să reia elementele de bază din manuale și să le ilustreze prin aplicații cât mai sugestive, prin exerciții și probleme metodic alese, prin soluții cât mai simple și mai naturale, prin teste judicios pregătite.

Culegerea de Probleme de Geometrie, Trigonometrie, Algebră și Analiză Matematică pentru licee pe care au alcătuit-o prof. Constantin Ionescu-Țiu și dr. ing. Mihail Popescu se înscrie în fruntea numeroaselor culegeri existente în literatura română de specialitate. Ea se recomandă mai întâi prin autorii ei.

Prof. C. Ionescu-Țiu a activat încă din tinerețe la vechea Gazetă Matematică. El a fost apoi ani îndelungați redactor responsabil al noii serii a Gazetei Matematice și s-a ilustrat atât ca profesor, cât și ca un fecund creator de probleme matematice.

Dr. ing. Mihail Popescu și-a început de asemenea ucenicia științifică la Gazeta Matematică, ilustrându-se întâi, pe când era elev de liceu, ca rezolvitor de probleme și, mai târziu, devenit inginer, apoi doctor inginer și cercetător

științific principal la Institutul de Cercetări Hidrotehnice din București prin valoroase contribuții originale în domeniul mecanicii fluidelor și al hidraulicii, care sunt ilustrate și prin apreciatele tratate de specialitate al căror autor este.

Aș putea spune că volumul pe care-l oferă acești doi autori tineretului studios este realizat în cea mai pură tradiție a Gazetei Matematice și continuă opera stâlpilor Gazetei, bine-cunoscuți (Ion Ionescu, George Țițeica, Andrei Ioachimescu, Vasile Cristescu), care au publicat și ei valoroase culegeri de probleme.

O simplă parcurgere a cuprinsului prezentului volum ne asigură că el conține o bogată colecție de probleme (în total 1350 probleme) însoțite de soluțiile lor alese în mod bine chibzuit, preocuparea de căpetenie a autorilor fiind aceea ca cititorul să-și însușească metode de rezolvare care să le permită să atace în mod independent și alte probleme similare.

Multe probleme sunt originale, fiind compuse de autori, plecând în general de la idei simple și fecunde, altele sunt datorate unor alți matematicieni cunoscuți menționați în text. Acestea au fost inițial publicate în special în Gazeta Matematică sau în alte reviste matematice cunoscute. Nu lipsesc desigur nici probleme date la diverse concursuri școlare sau la examene de admitere în institute de învățământ superior, precum și probleme propuse la concursuri internaționale.

Realizând acest auxiliar prețios pentru elevii care vor să se consacre în viitor în special științelor naturii sau științelor tehnice, autorii au adus, prin strădania lor, un mare serviciu cauzei învățământului românesc, pentru care se cade să le fim recunoscători. Editura Tehnică are meritul publicării prezentului volum în bune condiții, continuând astfel seria culegerilor de probleme de matematică publicate anterior de prof. C. Ionescu-Țiu în cadrul acestei edituri și care au adus, de asemenea, reale servicii școlii românești.

Academician Caius Iacob

București, august, 1990

PREFAȚĂ

la ediția întâi

În literatura de specialitate care se adresează elevilor de liceu s-a publicat de-a lungul timpului un număr mare de lucrări și culegeri de probleme de matematică.

Prin lucrarea de față autorii nu au dorit să prezinte o nouă culegere de probleme care să se adauge celor existente, ci în primul rând au încercat, pe baza experienței și rezultatelor proprii obținute în domeniu, să realizeze o carte cu probleme dintre cele mai reprezentative și eficiente în activitatea de pregătire matematică a elevilor de liceu.

Autorii au avut la dispoziție un material foarte vast de probleme de matematică: culegeri de probleme, colecțiile revistelor de matematică din țară (în primul rând Gazeta Matematică) și străinătate, probleme date la diferite concursuri pentru elevi și concursuri de admitere în învățământul superior, pe care le-au parcurs și analizat din dorința de a încerca să „selecteze” cele mai reprezentative probleme de matematică pentru licee.

Cartea conține 1350 probleme și se adresează în egală măsură atât elevilor de liceu care doresc să aprofundeze cunoștințele de matematică însușite în școală, cât și elevilor care se pregătesc pentru concursuri de admitere în învățământul superior și olimpiade de matematică. În tot cazul, diversitatea tipurilor de probleme alese și prezentate cu soluții complete, cu grade de dificultate de rezolvare diferite, din toată materia care se predă în licee, oferă elevilor posibilitatea nu numai să-și însușească diferite „metode de rezolvare” a problemelor de matematică, ci, mai ales, posibilitatea să-și formeze chiar un stil propriu de a aborda și rezolva probleme cu grade de dificultate diferite. Pentru a da o structură unitară cărții, s-a considerat necesar să se prezinte și un număr restrâns de probleme din fondul clasic de probleme de matematică pentru licee.

Pe de altă parte însă, având în vedere faptul că matematica pentru licee are o frumoasă tradiție în învățământul românesc, în carte a fost prezentat în mod deliberat un număr relativ mare de probleme ale autorilor români, care ilustrează într-un anumit fel însăși valoarea școlii românești de matematică în acest domeniu.

Dacă cei care vor citi această carte și vor reuși să înțeleagă și să-și însușească metodele de rezolvare, chiar și numai pentru o parte din problemele prezentate, dacă modul de selecționare a problemelor și de rezolvare a lor prin metode cât mai simple și directe va stimula dezvoltarea în continuare în țara noastră a matematicii pentru licee, vom considera că lucrarea de față și-a atins scopul.

AUTORII

București, decembrie, 1991

CUPRINS

Volumul 1

CUVÂNT ÎNAINTE la ediția a treia	5
PREFAȚĂ la ediția a treia	7
PREFAȚĂ la ediția a doua	9
CUVÂNT ÎNAINTE la ediția întâi	11
PREFAȚĂ la ediția întâi	13
Capitolul 1. GEOMETRIE PLANĂ / 460 probleme /	17
1.1. <i>Triunghiul</i>	17
1.2. <i>Cercul</i>	62
1.3. <i>Aplicații</i>	109
1.4. <i>Probleme de sinteză</i>	175
Capitolul 2. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU / 125 probleme /	251
2.1. <i>Dreapta. Planul</i>	251
2.2. <i>Poliedre. Corpuri rotunde</i>	263
2.3. <i>Probleme de sinteză</i>	301
Capitolul 3. TRIGONOMETRIE / 242 probleme /	319
3.1. <i>Funcții trigonometrice</i>	319
3.2. <i>Ecuații și inecuații trigonometrice</i>	343
3.3. <i>Aplicații ale trigonometriei în geometrie și mecanică</i>	362
3.4. <i>Probleme de sinteză</i>	385
Capitolul 4. ALGEBRĂ ELEMENTARĂ / 365 probleme /	418
4.1. <i>Elemente de calcul algebric și logică matematică. Mulțimi</i>	418
4.2. <i>Puteri și radicali</i>	454
4.3. <i>Funcția de gradul al II-lea. Numere complexe</i>	471
4.4. <i>Probleme de sinteză</i>	489

Capitolul 5. ALGEBRĂ / 241 probleme /	535
5.1. Legi de compoziție. Structuri algebrice. Metoda inducției matematice. Combinatorică	535
5.2. Ecuații exponențiale și logaritmice. Determinanți și matrice. Ecuații liniare	548
5.3. Polinoame. Ecuații de gradul 3 și de gradul 4	515
5.4. Probleme de sinteză	575
 Lista autorilor de probleme	636
 Bibliografie	638
 Foreword	647
 Avant propos	648
 Selected problems of mathematics	649
 Contents	650
 Problèmes choisies de mathématiques	651
 Contenu	652
 Abrevieri	653

CAPITOLUL 1

GEOMETRIE PLANĂ

1.1. TRIUNGHIUL

1.1

O rază de lumină SO este reflectată de o oglindă plană xy după direcția OS' . Se rotește apoi oglinda cu un unghi α și fie OS'' raza reflectată. Să se arate că unghiul razelor reflectate este 2α . (Proprietate folosită la construirea sextantului și a altor aparate de măsurat în fizică).

Soluție

Avem $\angle SOy = \angle S'Ox = \theta$, iar după rotire, $\angle SOy' = \angle S''Ox'$ de unde $\theta + \alpha = \theta - \alpha + \angle S'OS'' \Rightarrow \angle S'OS'' = 2\alpha$, (fig.1.1).

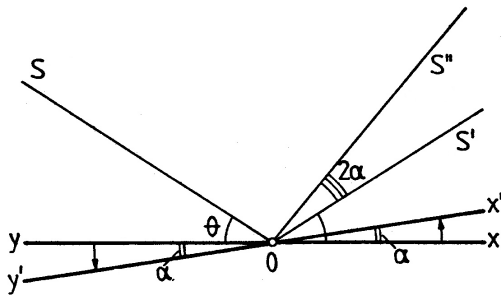


Fig. 1.1

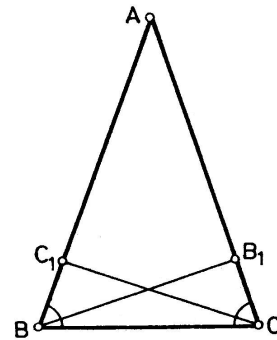


Fig. 1.2

1.2

Să se arate că un triunghi cu două înălțimi congruente este isoscel.

Soluție

Fie BB_1 și CC_1 cele două înălțimi congruente în triunghiul ABC (fig.1.2). Triunghiurile dreptunghice BB_1C și BC_1C sunt congruente deoarece au ipotenuza

comună (BC) și două catete congruente ($BB_1 = CC_1$). Rezultă $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$, deci triunghiul ABC este isoscel.

1.3

Fie D un punct pe latura AC a triunghiului ABC cu $AB > BC$. Să se demonstreze că $AB > BD$.

Soluție

Condiția $AB > BC$ implică $\sphericalangle C > \sphericalangle A$ (1). Pe de altă parte $\sphericalangle ADB > \sphericalangle C$ (2), ca unghi exterior triunghiului BCD . Din inegalitățile (1) și (2) rezultă că în triunghiul ABD avem $\sphericalangle BDA > \sphericalangle A$, de unde rezultă $AB > BD$ (fig.1.3).

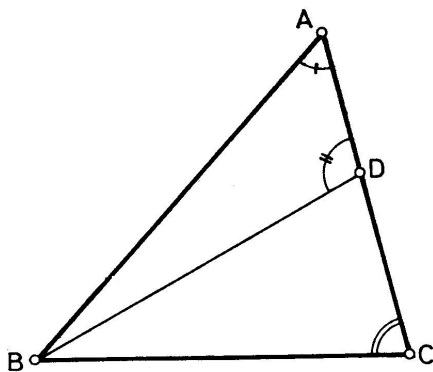


Fig. 1.3

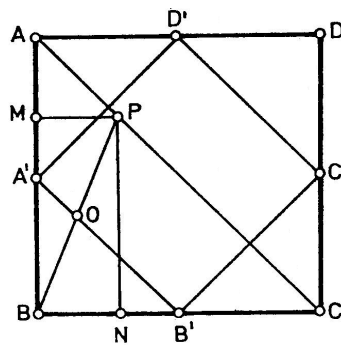


Fig. 1.4

1.4

Se dă un pătrat $ABCD$. Două puncte M și N parcurg conturul pătratului în sens invers acelor de ceasornic, pornind unul din A , celălalt din B , cu aceeași viteză. Se cere locul geometric al mijlocului O al segmentului MN .

Concurs elevi, 1974

Soluție

Ducem MP paralelă cu BN ($MP = BN$) (fig.1.4). Patrulaterul $MPNB$ este dreptunghi. Deci mijlocul O al segmentului MN este și mijlocul segmentului BP . Dar AMP este un triunghi dreptunghic isoscel. Când M descrie latura AB și N latura BC , P va descrie diagonala AC . Prin omotetie, O (mijlocul lui BP) va descrie o paralelă la AC , care va uni A' , B' – mijloacele laturilor AB și BC . Continuând raționamentul, locul geometric va fi pătratul $A'B'C'D'$ (C' și D' mijloacele lui CD și DA).

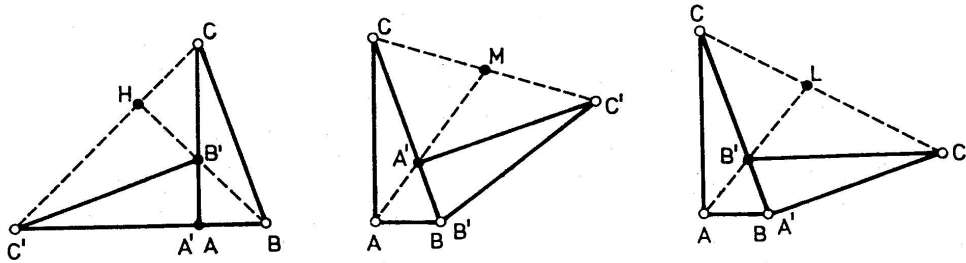
1.5

Două echere dreptunghice identice ABC și $A'B'C'$ se așează în pozițiile următoare (fig.1.5). Să se demonstreze că: a) HB' este înălțime în triunghiul $CC'B'$; b) MA' este mediană în triunghiul $CC'A'$; c) LB' este bisectoare în triunghiul $B'C'C$.

Gh. Bazacov, RMF, 1952

Soluție

Dreapta $C'B'$ este perpendiculară pe BC deoarece: $\sphericalangle CBA + \sphericalangle B'C'A' = \sphericalangle CBA + \sphericalangle BCA = 90^\circ$. HB' trecând prin B' , punctul de intersecție a două înălțimi în triunghiul CBC' , este de asemenea înălțime în același triunghi și deci și în triunghiul $CC'B'$. b) Triunghiurile $A'BA$ și $CB'C'$ sunt isoscele și având același unghi de vârf ($\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$) unghiurile de la baze sunt congruente, deci $\sphericalangle CA'M = \sphericalangle AA'B = \sphericalangle A'C'M$. Congruența unghiurilor $\sphericalangle MCA'$ și $\sphericalangle CA'M$ justifică faptul că în triunghiul dreptunghic $CA'C'$, $A'M$ este mediană. c) Unghiul $\sphericalangle CB'A$ este exterior triunghiului isoscel ABB' și deci $\sphericalangle CB'A = \sphericalangle A'AB' + \sphericalangle ABC$. Mai avem

**Fig. 1.5**

$\sphericalangle C'B'A = \sphericalangle AB'B + \sphericalangle A'B'C'$. Însă $\sphericalangle A'AB' = \sphericalangle AB'B$ și $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, de unde rezultă $\sphericalangle CB'A = \sphericalangle C'B'A$. Unghiurile $\sphericalangle C'B'L$ și $\sphericalangle LB'C$ având același supliment, $\sphericalangle CB'A = \sphericalangle C'B'A$, rezultă că sunt congruente, deci LB' este bisectoare în triunghiul $B'C'C$ (fig.1.5).

1.6

Fie ABC un triunghi echilateral și M mijlocul lui BC . Se proiectează B și C în N și P pe o dreaptă oarecare (d) ce trece prin A . Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

Gh. Bercea, RMF, 1953**Soluție**

Se observă că patrulateralele $ANMB$ și $AMPC$ sunt inscriptibile. Prin urmare $\sphericalangle MNP = \sphericalangle ABC = 60^\circ$ și $\sphericalangle MPN = \sphericalangle ACB = 60^\circ$. Având două unghiuri de 60° , triunghiul MNP este echilateral (fig.1.6).

1.7

ABC fiind un triunghi echilateral și I un punct oarecare din planul lui, cu segmentele IA , IB , IC se poate construi un triunghi.

Teorema Dimitrie Pompeiu

PROBLEME ALESE
DE MATEMATICĂ
pentru licee

În timp ce prima ediție a acestei lucrări se afla sub tipar ne-a părăsit profesorul CONSTANTIN IONESCU-ȚIU, care timp de jumătate de secol a slujit cu credință Gazeta Matematică și care a avut o contribuție hotărâtoare la această lucrare.

Ne-a părăsit, de asemenea, academicianul CAIUS IACOB, care cu dragostea lui permanentă pentru școala românească a susținut cu entuziasm și căldură munca noastră.

Memoriei lor luminoase fie-le dedicată această carte.

Prof. univ. dr. ing. Mihail Popescu
București, 12 noiembrie 1992

Prof. CONSTANTIN IONESCU - ȚIU
Prof. univ. dr. MIHAIL POPESCU

PROBLEME ALESE de MATEMATICĂ

**Geometrie, trigonometrie, algebră,
analiză matematică, probabilități**

– pentru licee –

*Ediția a III-a
revizuită și completată*

Vol. 2 (Cap. 6–9)

Cuvânt înainte
Prof. univ. dr. Radu Gologan



EDITURA UNIVERSITARĂ
București, 2014

Control științific: Conf. univ. dr. Valeriu Zevedei
Redactor: Prof. univ. dr. ing. Mihail Popescu
Tehnoredactor: Ion Costache, Ameluța Vișan
Desene: Laurențiu Iliescu, Ion Costache
Coperta: Ion Costache

Editură recunoscută de Consiliul Național al Cercetării Științifice (C.N.C.S.) și inclusă de Consiliul Național de Atestare a Titlurilor, Diplomelor și Certificatelor Universitare (C.N.A.T.D.C.U.) în categoria editurilor de prestigiu recunoscut.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
IONESCU ȚIU, CONSTANTIN

Probleme de matematică alese pentru liceu / Constantin Ionescu

Țiu, Mihail Popescu. - București : Editura Universitară, 2014

2 vol.

ISBN 978-606-591-933-4

Vol. 2. - ISBN 978-606-591-934-1

I. Popescu, Mihail

51(075.35)(076)

DOI: (Digital Object Identifier): 10.5682/9786065919341

Ediția I, Editura Tehnică, 1994
Ediția a II-a, Editura Tehnică, 2003
Ediția a III-a, Editura Universitară, 2014

© Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate, nicio parte din această lucrare nu poate fi copiată fără acordul Editurii Universitare

Copyright © 2014
Editura Universitară
Director: Vasile Muscalu
B-dul. N. Bălcescu nr. 27-33, Sector 1, București
Tel.: 021 – 315.32.47 / 319.67.27
www.editurauniversitara.ro
e-mail: redactia@editurauniversitara.ro

Distribuție: tel.: 021-315.32.47 / 319.67.27 / 0744 EDITOR / 07217 CARTE
comenzi@editurauniversitara.ro
O.P. 15, C.P. 35, București
www.editurauniversitara.ro

CUVÂNT ÎNAINTE

la ediția a treia

Iată o culegere de probleme de matematică ce conține peste 2000 de mici rezultate matematice din toate domeniile matematicii școlare, cu un succes neașteptat peste ani, ajunsă la a treia ediție.

Autorul, doctor inginer de profesie, a rămas de-a lungul timpului un mare iubitor al matematicii școlare și a strâns, cu răbdare, problemele de matematică cele mai frumoase și cele mai utile pregătiri matematice, din ultima jumătate de secol și uneori mai mult.

Un număr însemnat dintre aceste probleme, publicate în Gazeta Matematică au ca autor pe prof. C. Ionescu-Țiu, stâlp al Gazetei Matematice în perioada 1950–1990.

Influența acestuia asupra educației matematice a fost extrem de benefică și a susținut în timp acel titlu de excelență acordat în lume școlii matematice românești.

Lucrarea este excelent alcătuită, problemele gradat alese și sunt convins că tinerii ce se vor apleca asupra textului cu răbdare și pasiune vor putea accede în timp la vârfurile științei, nu numai matematice.

Închei remarcând valoarea istorică a lucrării ca un compendiu al problemelor Gazetei Matematice, revistă românească ce iată, străbate cel de-al treilea secol de existență

**Prof. univ. dr. Radu Gologan
Președintele Societății de Științe
Matematice din România**

București, Decembrie, 2013

**În anul 2012 s-au împlinit
100 de ani de la nașterea
marelui matematician român
Acad. Caius Iacob**

PREFAȚĂ

la ediția a treia

Ediția precedentă a cărții, fiind publicată în 500 de exemplare, s-a epuizat foarte repede din librării.

Ediția de față, a treia, cuprinde peste 2000 de probleme complet rezolvate, multe dintre ele fiind alese dintre cele publicate în ultimii 10 ani de la ediția precedentă.

În recenzia cărții care a apărut în Gazeta Matematică, seria A, nr. 3 din anul 1998 Prof. univ. N. N. Mihăileanu de la Facultatea de Matematică din București făcea următoarele aprecieri:

„Această culegere cuprinde foarte multe probleme, mare parte din ele având autori români, ele constituind o contribuție importantă în domeniul matematicii de liceu.

O altă caracteristică importantă a cărții este faptul că toate problemele sunt rezolvate complet și cu deosebită acuratețe.

În ce privește problema 9.123 propusă de Prof. Mihail Popescu, ea pune în evidență cunoștințele foarte specializate de teoria cuadricelor ale autorului, deși nu se încadrează în programa analitică a matematicii de liceu.

Cu plăcută surpriză constat că deși Prof. Mihail Popescu este inginer, el este „de-ai noștri”, și privesc cu invidie generalizările atât de izbutite și variate date la mai multe probleme de geometrie”.

Cartea având peste 1000 de pagini s-a impus publicarea ei în două volume și anume: Vol. 1 (cap 1–5) și Vol. 2 (cap 6–9)**.*

**Prof. univ. dr. Mihail Popescu
Facultatea de Construcții
Universitatea Ovidius din Constanța**

București, 28 Octombrie, 2013

* Menționăm următoarele 11 probleme din carte: 1.78, 1.221, 1.353, 1.431, 1.433, 4.99, 4.330, 9.1, 9.4, 9.106, 9.123, care prezintă o anumită semnificație în activitatea autorului din domeniul matematicii.

** O culegere asemănătoare de probleme de matematică pentru licee a fost publicată în anul 1901: I. Ionescu, G. Țițeica, A. Ioachimescu, V. Cristescu: Culegere de probleme de aritmetică, geometrie, algebră și trigonometrie, Editura Gazetei Matematice, București, 1901.

PREFAȚĂ

la ediția a doua

Prima ediție a acestei cărți, deși a fost publicată în 15 000 de exemplare, s-a epuizat repede din librării, iar în momentul de față, după opt ani, nu se găsește nici în anticariate.

Având o prezentare elogioasă a academicianului Caius Iacob, cartea a fost primită cu mare interes de către elevii și profesorii de liceu.

Am avut posibilitatea, cu ajutorul colegilor mei, profesori de matematică, să prezint elevilor de la câteva licee din București și din țară această culegere de probleme.

Deoarece cartea acoperă toată programa analitică a matematicii care se predă în licee, am constatat cu satisfacție marele interes pe care l-au arătat elevii față de această culegere, care prezintă un așa de mare număr de probleme, toate însoțite de figuri și soluții complete.

Pe de altă parte însă, este bine cunoscut faptul că elevii își îndreaptă atenția în primul rând asupra cărților recomandate de profesorii lor.

Pentru ca această carte să ajungă mai repede la elevi, ar trebui poate să spun că ea se adresează în primul rând ... profesorilor de matematică!

În tot cazul, având experiența și altei culegeri de probleme de matematică pentru licee, publicată în anul 1997, adresându-mă aici elevilor de liceu, le pot mărturisi că în această carte am căutat să surprind frumusețea matematicii, acolo unde este ea, alegând dintre problemele mai grele sau mai ușoare întâlnite, pe cele care imprimă parcă spiritului uman un pic de îndrăzneală în ... „lupta cu imposibilul”.

Și într-adevăr, de multe ori, cei care sunt puși să rezolve o problemă de matematică, de fapt ca și în problemele de viață, au de ales între „totul sau nimic”.

Din acest punct de vedere matematica are un loc aparte, care, într-o lume răvășită de atâtea probleme, poate fi un izvor de satisfacții spirituale și o rază de speranță.

Pe de altă parte însă, matematica este o materie între multe altele, pe care elevul trebuie s-o parcurgă și să și-o însușească, începând cu școala generală și până la terminarea liceului.

Pus în această situație elevul, avându-l alături pe profesorul de matematică, are de ales parcă între prietenia cu o „matematică frumoasă și atrăgătoare”, sau lupta cu un adversar pe care încearcă să-l înfrângă, fără să-și dea seama că acesta n-a fost învins niciodată de cei care mai întâi nu i-au fost prieteni.

Cartea conține 1900 probleme, cu 550 în plus față de ediția întâi, plasate în capitolele 1 ÷ 7 în paragraful „probleme de sinteză” și în capitolele 8 și 9 în „Secțiunea B”, și acoperă întreg domeniul matematicii de liceu: Geometrie, Trigonometrie, Algebră și Analiză Matematică.

Cartea se adresează în egală măsură atât elevilor care doresc să aprofundeze cunoștințele de matematică însușite în școală, cât și elevilor care se pregătesc pentru concursuri de admitere în învățământul superior și olimpiade de matematică.

Problemele cuprinse în carte sunt însoțite de figuri și soluții complete, și oferă elevilor posibilitatea nu numai să-și însușească diferite metode de rezolvare², ci mai ales posibilitatea de a-și forma chiar un stil propriu de rezolvare a unor probleme de matematică, cu grade de dificultate diferite.

Ca și la ediția întâi, îmi exprim speranța, că dacă cei care vor citi această carte și vor reuși să înțeleagă și să-și însușească metodele de rezolvare, chiar și numai pentru o parte din problemele prezentate, dacă modul de selecționare a problemelor și de rezolvare a lor prin metode cât mai simple și directe va stimula dragostea pentru matematică, atunci putem considera că lucrarea de față și-a atins scopul.

**Profesor universitar
Mihail Popescu
Facultatea de Construcții
Universitatea Ovidius din Constanța**

București, 12 noiembrie, 2002

CUVÂNT ÎNAINTE

La ediția întâi

Matematicii i se rezervă acum, în acest sfârșit de secol și de mileniu, un rol esențial în învățământul liceal. Ea este considerată, pe drept cuvânt, datorită virtuților ei educative, ca un element de cultură generală absolut necesar în orice domeniu de activitate umană, ca un auxiliar prețios pentru formarea unei gândiri corecte, consecvente, care mărește puterea de pătrundere și de analiză a spiritului uman în orice domeniu de activitate.

Dar însușirea de către elev a abilității necesare pentru rezolvarea diverselor probleme matematice nu este deloc ușoară.

Ea reclamă o muncă susținută, temeinică, tenace, în vederea asimilării cunoștințelor primite la școală, ea cere rezolvarea de numeroase exerciții, probleme și aplicații, elevul urmând a lămuri cu creionul în mână fiecare amănunt, fiecare implicație logică și adâncind mereu noțiunile de bază. După o astfel de muncă, pe nesimțite, vâlul care-l înconjoară se destramă și o perspectivă admirabilă i se deschide. Matematica îi va apărea în toată măreția ei și ea îi va oferi acea cheie minunată cu ajutorul căreia va putea deschide larg porțile diverselor științe ale naturii sau ale disciplinelor tehnice. Pentru tânărul dornic să ajungă la acest stadiu, un auxiliar prețios se impune. Acesta este constituit de obicei de o bună culegere de probleme care să reia elementele de bază din manuale și să le ilustreze prin aplicații cât mai sugestive, prin exerciții și probleme metodic alese, prin soluții cât mai simple și mai naturale, prin teste judicioase pregătite.

Culegerea de Probleme de Geometrie, Trigonometrie, Algebră și Analiză Matematică pentru licee pe care au alcătuit-o prof. Constantin Ionescu-Țiu și dr. ing. Mihail Popescu se înscrie în fruntea numeroaselor culegeri existente în literatura română de specialitate. Ea se recomandă mai întâi prin autorii ei.

Prof. C. Ionescu-Țiu a activat încă din tinerețe la vechea Gazetă Matematică. El a fost apoi ani îndelungați redactor responsabil al noii serii a Gazetei Matematice și s-a ilustrat atât ca profesor, cât și ca un fecund creator de probleme matematice.

Dr. ing. Mihail Popescu și-a început de asemenea ucenicia științifică la Gazeta Matematică, ilustrându-se întâi, pe când era elev de liceu, ca rezolvitor de probleme și, mai târziu, devenit inginer, apoi doctor inginer și cercetător

științific principal la Institutul de Cercetări Hidrotehnice din București prin valoroase contribuții originale în domeniul mecanicii fluidelor și al hidraulicii, care sunt ilustrate și prin apreciatele tratate de specialitate al căror autor este.

Aș putea spune că volumul pe care-l oferă acești doi autori tineretului studios este realizat în cea mai pură tradiție a Gazetei Matematice și continuă opera stâlpilor Gazetei, bine-cunoscuți (Ion Ionescu, George Țițeica, Andrei Ioachimescu, Vasile Cristescu), care au publicat și ei valoroase culegeri de probleme.

O simplă parcurgere a cuprinsului prezentului volum ne asigură că el conține o bogată colecție de probleme (în total 1350 probleme) însoțite de soluțiile lor alese în mod bine chibzuit, preocuparea de căpetenie a autorilor fiind aceea ca cititorul să-și însușească metode de rezolvare care să le permită să atace în mod independent și alte probleme similare.

Multe probleme sunt originale, fiind compuse de autori, plecând în general de la idei simple și fecunde, altele sunt datorate unor alți matematicieni cunoscuți menționați în text. Acestea au fost inițial publicate în special în Gazeta Matematică sau în alte reviste matematice cunoscute. Nu lipsesc desigur nici probleme date la diverse concursuri școlare sau la examene de admitere în institute de învățământ superior, precum și probleme propuse la concursuri internaționale.

Realizând acest auxiliar prețios pentru elevii care vor să se consacre în viitor în special științelor naturii sau științelor tehnice, autorii au adus, prin strădania lor, un mare serviciu cauzei învățământului românesc, pentru care se cade să le fim recunoscători. Editura Tehnică are meritul publicării prezentului volum în bune condiții, continuând astfel seria culegerilor de probleme de matematică publicate anterior de prof. C. Ionescu-Țiu în cadrul acestei edituri și care au adus, de asemenea, reale servicii școlii românești.

Academician Caius Iacob

București, august, 1990

PREFAȚĂ

la ediția întâi

În literatura de specialitate care se adresează elevilor de liceu s-a publicat de-a lungul timpului un număr mare de lucrări și culegeri de probleme de matematică.

Prin lucrarea de față autorii nu au dorit să prezinte o nouă culegere de probleme care să se adauge celor existente, ci în primul rând au încercat, pe baza experienței și rezultatelor proprii obținute în domeniu, să realizeze o carte cu probleme dintre cele mai reprezentative și eficiente în activitatea de pregătire matematică a elevilor de liceu.

Autorii au avut la dispoziție un material foarte vast de probleme de matematică: culegeri de probleme, colecțiile revistelor de matematică din țară (în primul rând Gazeta Matematică) și străinătate, probleme date la diferite concursuri pentru elevi și concursuri de admitere în învățământul superior, pe care le-au parcurs și analizat din dorința de a încerca să „selecteze” cele mai reprezentative probleme de matematică pentru licee.

Cartea conține 1350 probleme și se adresează în egală măsură atât elevilor de liceu care doresc să aprofundeze cunoștințele de matematică însușite în școală, cât și elevilor care se pregătesc pentru concursuri de admitere în învățământul superior și olimpiade de matematică. În tot cazul, diversitatea tipurilor de probleme alese și prezentate cu soluții complete, cu grade de dificultate de rezolvare diferite, din toată materia care se predă în licee, oferă elevilor posibilitatea nu numai să-și însușească diferite „metode de rezolvare” a problemelor de matematică, ci, mai ales, posibilitatea să-și formeze chiar un stil propriu de a aborda și rezolva probleme cu grade de dificultate diferite. Pentru a da o structură unitară cărții, s-a considerat necesar să se prezinte și un număr restrâns de probleme din fondul clasic de probleme de matematică pentru licee.

Pe de altă parte însă, având în vedere faptul că matematica pentru licee are o frumoasă tradiție în învățământul românesc, în carte a fost prezentat în mod deliberat un număr relativ mare de probleme ale autorilor români, care ilustrează într-un anumit fel însăși valoarea școlii românești de matematică în acest domeniu.

Dacă cei care vor citi această carte și vor reuși să înțeleagă și să-și însușească metodele de rezolvare, chiar și numai pentru o parte din problemele prezentate, dacă modul de selecționare a problemelor și de rezolvare a lor prin metode cât mai simple și directe va stimula dezvoltarea în continuare în țara noastră a matematicii pentru licee, vom considera că lucrarea de față și-a atins scopul.

AUTORII

București, decembrie, 1991

CUPRINS

Volumul 2

CUVÂNT ÎNAINTE la ediția a treia	5
PREFAȚĂ la ediția a treia	7
PREFAȚĂ la ediția a doua	9
CUVÂNT ÎNAINTE la ediția întâi	11
PREFAȚĂ la ediția întâi	13
Capitolul 6. GEOMETRIE ANALITICĂ / 93 probleme/	17
6.1. <i>Dreapta în plan</i>	17
6.2. <i>Cercul. Conice</i>	25
6.3. <i>Probleme de sinteză</i>	40
Capitolul 7. ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ / 295 probleme/	69
7.1. <i>Funcții. Șiruri. Limite</i>	69
7.2. <i>Derivate și aplicații</i>	91
7.3. <i>Integrale și aplicații. Ecuații diferențiale</i>	114
7.4. <i>Probleme de sinteză</i>	132
Capitolul 8. ELEMENTE DE PROBABILITĂȚI / 50 probleme/	200
8.1. <i>Secțiunea A</i>	200
8.2. <i>Secțiunea B</i>	212
Capitolul 9. PROBLEME GENERALE DE SINTEZĂ / 338 probleme/	224
9.1. <i>Secțiunea A</i>	224
9.2. <i>Secțiunea B</i>	306
<i>Lista autorilor de probleme</i>	465
<i>Bibliografie</i>	467
<i>Foreword</i>	476

<i>Avant propos</i>	477
<i>Selected problems of mathematics</i>	478
<i>Contents</i>	479
<i>Problèmes choisies de mathématiques</i>	480
<i>Contenu</i>	481
<i>Abrevieri</i>	482

CAPITOLUL 6

GEOMETRIE ANALITICĂ

6.1. DREAPTA ÎN PLAN

6.1

Se dau punctele $A(2, 1)$ și $B(0, -1)$ față de două axe perpendiculare. Să se scrie ecuația dreptei simetrice dreptei AB față de dreapta OA .

Soluție

Ecuația dreptei AB este $y = x - 1$, iar ecuația dreptei $OA \equiv y = \frac{1}{2}x$, cu coeficientul unghiular $m = \frac{1}{2}$. Coeficientul unghiular al dreptei perpendiculare pe ea este $m' = -2$. Scriem, de asemenea, ecuația dreptei ce trece prin B și este perpendiculară pe $OA \equiv y + 2x + 1 = 0$. Coordonatele punctului C de intersecție a dreptelor OA și AB se obțin rezolvând sistemul dat de ecuațiile: $y = \frac{1}{2}x$ și $y + 2x + 1 = 0$ și rezultă $C\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$. Coordonatele punctului B' , simetricul lui B față de OA , sunt $-\frac{4}{5}$ și $\frac{3}{5}$. Pentru a determina simetrica dreptei AB față de dreapta OA este suficient să aflăm simetricile a două puncte ale dreptei AB față de OA . Aceste puncte sunt A și B' . Deci dreapta căutată va fi dreapta $AB' \equiv x - 7y + 5 = 0$.

6.2

Laturile unui triunghi sunt date de ecuațiile $5x - 2y + 6 = 0$, $4x - y + 3 = 0$ și $x + 3y - 7 = 0$. Fără a calcula coordonatele vârfurilor triunghiului să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin vârfurile acestui triunghi și sunt paralele cu laturile opuse.

Soluție

Ecuația unei drepte care trece prin primul vârf, adică prin punctul de intersecție a primelor două laturi, este: $5x - 2y + 6 + q(4x - y + 3) = 0$. Dreapta căutată care trece prin acest vârf trebuie să fie paralelă cu cea de a treia latură a triunghiului; deci coeficienții coordonatelor din ecuațiile lor trebuie să fie proporționali: $\frac{5+4q}{1} = \frac{-2-q}{3}$, de unde $q = -\frac{17}{13}$. Punând valoarea găsită a parametrului q în ecuația fascicolului, se obține ecuația dreptei căutate: $x + 3y - 9 = 0$. Pe aceeași cale se determină ecuațiile dreptelor care trec prin celelalte două vârfuri ale triunghiului: $68x - 17y + 57 = 0$; $65x - 26y + 72 = 0$.

6.3

Să se determine c astfel ca dreptele: $4x + 3y - c = 0$; $2x + 2y - 1 = 0$; $3x + 6y - 5 = 0$ să fie concurente. Să se găsească punctul de intersecție.

Soluție

Condiția ca dreptele să fie concurente se află scriind că prin punctul de intersecție a două drepte trece și dreapta a treia. Rezolvând sistemul format de ultimele două ecuații: $2x + 2y - 1 = 0$, $3x + 6y - 5 = 0$ rezultă $x = -\frac{2}{3}$; $y = \frac{7}{6}$.

Punctul de intersecție este $M\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$. Pentru ca dreptele să fie concurente trebuie ca și prima ecuație să fie verificată de coordonatele acestui punct, deci: $4\left(-\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{7}{6}\right) - c = 0$, adică $c = \frac{5}{6}$.

Altă metodă (prin determinanți):
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -c \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

6.4

Să se găsească ecuațiile laturilor unui triunghi ABC la care dreptele de ecuații $2x - 3y + 1 = 0$ și $x + y = 0$ sunt înălțimi, iar $A(1, 2)$ este unul din vârfuri.

C. Ionescu-Țiu**Soluție**

Se constată că $A(1, 2)$ nu aparține celor două înălțimi, deci ecuațiile date reprezintă înălțimile duse pe AB și pe AC . Fie $y = mx + n$ și $y = m_1x + n_1$ ecuațiile laturilor AB și AC care se intersectează în $A(1, 2)$. Rezultă $m + n = m_1 + n_1 = 2$.

Ecuatia dreptei AB se mai scrie $y = mx + (2-m)$ și fiind perpendiculară pe înălțimea din C de ecuație $x+y = 0$ rezultă $AB: x - y + 1 = 0$. Dreapta AC de ecuație $y = m_1x - (2 - m_1)$ fiind perpendiculară pe dreapta de ecuație $2x - 3y + 1 = 0$ rezultă $AC: 3x + 2y - 7 = 0$. Coordonatele punctului C sunt soluțiile sistemului: $3x + 2y - 7 = 0, x + y = 0 \Rightarrow C(7; -7)$. Coordonatele lui B sunt soluțiile sistemului $2x - 3y + 1 = 0; x - y + 1 = 0, \Rightarrow B(-2, -1)$. Ecuația dreptei BC care trece prin $B(-2; -1)$ și $C(7; -7)$ este $2x + 3y + 7 = 0$.

6.5

Se consideră punctele $A(\lambda - 1, 0), B(\lambda + 2, 0), C(0, \lambda - 2), D(0, \lambda + 1)$. Se cere locul geometric al intersecției dreptelor AD și BC , λ fiind un parametru real variabil.

Soluție

Ecuatia dreptei AD este: $y - (\lambda + 1) = -\frac{(\lambda+1)}{\lambda-1}x$, adică $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - (\lambda^2 - 1) = 0$, (1), iar a dreptei BC , $y - (\lambda - 2) = -\frac{(\lambda-2)}{\lambda+2}x$, adică $(\lambda + 2)y + (\lambda - 2)x - (\lambda^2 - 4) = 0$, (2). Pentru a afla locul geometric al intersecției acestor drepte, eliminăm parametrul λ între ecuațiile lor. Scăzând ecuația (2) din (1) rezultă: $3x - 3y = 0$, adică $x - y - 1 = 0$. Deci locul geometric căutat este o dreaptă care taie axele de coordonate în punctele $(1, 0)$ și $(0, -1)$.

6.6

Se dau dreptele $\lambda x + 5y - 1 = 0; 2\lambda x - 10y + 7 = 0$. Să se determine λ astfel ca dreptele să fie: a) perpendiculare; b) paralele; c) să facă între ele un unghi de 45° .

Soluție

a) Dreptele sunt perpendiculare dacă între coeficienții unghiulari avem relația $1 + m_1m_2 = 0$; $m_1 = -\frac{\lambda}{5}, m_2 = \frac{2\lambda}{10}$, deci $2\lambda^2 - 50 = 0$, de unde $\lambda = \pm 5$. b) Pentru ca dreptele să fie paralele trebuie ca $m_1 = m_2$; $-\frac{\lambda}{5} = \frac{2\lambda}{10}$, deci $\lambda = 0$. c) Ținând seama de orientarea dreptelor avem condiția $\frac{\pm 10\lambda}{\lambda^2 - 25} = 1$, după cum λ este pozitiv sau negativ. Rezultă ecuația $\lambda^2 \pm 10\lambda - 25 = 0$, cu soluțiile: $\lambda = \pm 5 \pm \sqrt{50} = 5(\pm 1 \pm \sqrt{2})$. Avem $+$ sau $-$, după cum λ este pozitiv sau negativ. Avem deci soluțiile: $\lambda = 5(1 + \sqrt{2}), \lambda = -5(1 + \sqrt{2})$. Celelalte soluții: $\lambda = 5(-1 + \sqrt{2})$ și $\lambda(5 - \sqrt{2})$ reprezintă condiția ca cele două drepte să facă un unghi de 135° . Dacă nu se ține seama de orientarea dreptelor, atunci toate valorile găsite sunt soluții ale problemei.

6.7

Un triunghi echilateral are două vârfuri: $A(2, 0)$ și $B(1, 3)$. Să se arate că al treilea vârf este situat pe una din dreptele $x - y = \pm\sqrt{3}$.

Soluție

Fie $M(\alpha, \beta)$ al treilea vârf. Trebuie ca $MA = MB = AB$. Deci $(\alpha - 2)^2 + \beta^2 = (\alpha - 1)^2 + (\beta - 3)^2 = 10$. De aici se obține sistemul $\alpha - 3\beta + 3 = 0$ și $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 6 = 0$, cu soluția $\alpha = \frac{3(1 \pm \sqrt{3})}{2}$ și $\beta = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$. Aceste valori verifică ecuația dată $\alpha - \beta = \pm\sqrt{3}$, prin urmare punctul M se află pe dreapta dată.

6.8

Să se afle locul geometric al centrelor dreptunghiurilor înscrise într-un triunghi dat și care au una din laturi situată pe baza triunghiului.

Soluție

Fie triunghiul ABC cu vârfurile $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ și $C(c, d)$. Dacă notăm cu $x = \alpha$, $y = \beta$ coordonatele vârfului (dreptunghiului înscris) situat pe latura BC , atunci pentru coordonatele centrului dreptunghiului rezultă: $x = \frac{d(\alpha + a) + \beta(c - a)}{ad}$; $\frac{\lambda}{5} = \frac{2\lambda}{10}$ și relația $\frac{\alpha - b}{c - b} = \frac{\beta}{d}$. Eliminând pe α și β dintre relațiile de mai sus, rezultă ca loc geometric dreapta: $2dx + (a + b - 2c)y - d(b + a) = 0$.

6.9

Considerăm unghiul drept xOy , o dreaptă oarecare (d) și un punct M , mobil, pe această dreaptă. Fie P și Q proiecțiile lui M respectiv pe Ox și Oy . Se cere: a) Locul geometric al intersecției paralelei duse prin P la (d) cu perpendiculara dusă din Q pe (d) ; b) Locul intersecției paralelei duse din Q la (d) cu perpendiculara dusă din P pe (d) .

Concurs admitere, Facultatea de Matematică, Cluj, 1964

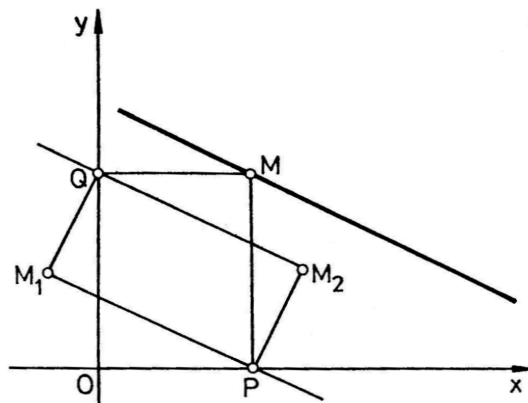


Fig. 6.9